以下の演習問題は理解度の確認用であり，自力で解けることが到達目標である．必ず自分の手を動かしてやってみること．不明な点はプリントや電磁気学を復習のこと．右隅に回答のみを示してあるが，ほとんどの問題はプリントを参照すれば導出可能.

1. 波動情報の序論

1.1　電波の周波数範囲と呼称，およびその利用形態について述べよ．　（プリント参照）

1.2　電波の基本的な性質（横波，速度，．．．）について述べよ．　（プリント参照）

1.3　周波数 f と波長 λ の間に成り立つ関係式を示しなさい.

1.4　周波数が $f = 1\ \mathrm{MHz}$，$f = 10\ \mathrm{MHz}$，$f = 100\ \mathrm{MHz}$，$f = 1000\ \mathrm{MHz}$ のとき，自由空間中での波長を求めなさい.

＃分布定数線路と共通関連事項

1.5　集中定数回路と分布定数回路の違いは何か？なぜ，分布定数回路が必要か？

（ヒント：波長と回路のサイズを比較）

1.6　Z_0 の特性インピーダンスをもつ分布定数線路に Z_r の負荷インピーダンスが繋がれている．反射係数 $\boldsymbol{\Gamma}$ を求めよ.　$\boldsymbol{\Gamma} = \dfrac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0}$

1.7　電圧定在波比 $S = \dfrac{1 + |\boldsymbol{\Gamma}|}{1 - |\boldsymbol{\Gamma}|}$ が与えられたとき，反射係数の大きさをSによって表しなさい.

（Sは測定しやすいが，反射係数を測定することは難しいために，よく使われる方法である）

1.8　反射係数が -10 dB (0.1)のとき，電圧定在波比S，反射減衰量 $(-20\log|\boldsymbol{\Gamma}|)$，負荷に入力される電力 $\left(1 - |\boldsymbol{\Gamma}|^2\right)$ は何%か？

2. 波動方程式と解

<Maxwell方程式>

2.1　４本のMaxwellの方程式を書き，それぞれの式の意味を説明しなさい.　（電磁気学を復習）

2.2　４本のMaxwellの方程式で，発散方程式 $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$，$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ は他の２つの方程式から電荷保存則 $\nabla\cdot\boldsymbol{J} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ を使って導かれることを示しなさい.　（ヒント：$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{0}$）

<波動方程式>

2.3　Phasor表現とは何か？また，Phasorの利点は何か？

2.4　Maxwellの方程式から，自由空間中で電流源や電荷が無い($\boldsymbol{J} = 0$，$\rho = 0$)場合，電界 $\boldsymbol{E}$ に対する波動方程式を導きなさい．ただし，場は $\exp(j\omega t)$ で調和振動すると仮定する.　$(\nabla^2\boldsymbol{E} + k^2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0})$

2.5　平面上で同じ位相をもつ波を平面波という．任意の方向に伝搬する平面波を仮定して波動方程式を解きなさい．ただし，波数ベクトルを $\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{a}_x + k_y\boldsymbol{a}_y + k_z\boldsymbol{a}_z$ とする.

$\boldsymbol{E}_0\exp[j(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$，$\boldsymbol{E}_1\exp[j(\omega t + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$

2.6　自由空間中でz方向に伝搬する平面波を仮定して，電界に対する波動方程式から，その解を求めなさい．ただし，$\exp(j\omega t)$ で時間変化すると仮定する.

$\boldsymbol{E}_0\exp[j(\omega t - kz)]$，$\boldsymbol{E}_1\exp[j(\omega t + kz)]$

2.6　自由空間中でx成分の電界をもつ平面波がz方向に伝搬する場合，電界と磁界の関係式を示しなさい．

2.7　$\boldsymbol{k}$ 方向に進む電界に対して(2.5参照)，Maxwellの方程式から以下のベクトル関係式が導出されることを示しなさい．ただし，$\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{a}_x + k_y \boldsymbol{a}_y + k_z \boldsymbol{a}_z = |\ k\ | \hat{\boldsymbol{k}}$ とする．

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}_0 = \eta \boldsymbol{H}_0 \ ,\ \eta \boldsymbol{H}_0 \times \hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{E}_0 \ ,\ \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0 \ ,\ \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{H}_0 = 0$$

また，これらのベクトルの関係を図示しなさい．

2.8　$\boldsymbol{k}$ 方向に進む平面波には，その伝搬方向の電界成分が無いことを示しなさい．

2.9　自由空間中で平面波の位相速度を導出しなさい．　$\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8\ [m/s]$

2.10 球座標系でr方向しか変化が無い（角度方向の変化はない）と仮定して，波動方程式を解き，解の基本形を示しなさい．　$\dfrac{e^{-jkr}}{r}\ ,\ \dfrac{e^{jkr}}{r}$

＜媒質と伝搬定数に関して＞

2.11　Maxwellの方程式から，誘電率 ε，透磁率 μ，導電率 σ をもつ損失誘電体中で電流源や電荷が無い（$\boldsymbol{J} = 0\ ,\rho = 0$)場合，電界 $\boldsymbol{E}$ に対する波動方程式を導きなさい．ただし，場は $\exp\left(j\omega t\right)$ で調和振動すると仮定する．　$(\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}\ ,\ \ k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - j\omega\mu\sigma)$

2.12 比誘電率 $\varepsilon_r = 4, 9, 25, 36, 81$ の誘電体中で $f = 100\ \mathrm{MHz}$ の波の波長を求めなさい．

2.13 比誘電率 $\varepsilon_r = 4, 9, 25, 36, 81$ の誘電体中での波の速度を求めなさい．

2.14 誘電率 ε，透磁率 μ，導電率 σ の媒質中で，角周波数 ω をもつ平面波の伝搬定数（位相定数 β，減衰定数 α ）を導出しなさい．　$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\ \sqrt{\dfrac{\sqrt{1 - (\sigma/\omega\varepsilon)^2} - 1}{2}}\ ,\ \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\ \sqrt{\dfrac{\sqrt{1 - (\sigma/\omega\varepsilon)^2} + 1}{2}}$

2.15　2.14で求めた伝搬定数について，$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$　および　$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$　の条件で近似式を導きなさい．

また，近似式から波の減衰は導電率に関してどのようなことがいえるか？

$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu\sigma}\ ,\ \alpha = \dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$　（導電率に比例）

2.16 海水などの導電率の大きな媒質では，低い周波数帯では導体とみなされ，周波数が高くなると誘電体としての性質を持つようになる．海水の導電率を $\sigma = 2\ [S/m]$ ，比誘電率を $\varepsilon_r = 80$ とすれば，海水はどの程度の周波数まで導体とみなしてよいか？　$450\ MHz$

2.17 導電率の大きな媒質で電界が時間的に $\exp\left(j\omega t\right)$ で変化すると仮定し，電界の値が表面での $1/e$ になるzを求めよ．このz = δ をスキンデプスと言う．

$$\frac{d^2\boldsymbol{E}}{dz^2} = \sigma\mu \frac{d\boldsymbol{E}}{dt} \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

2.18 銅の導電率は $\sigma = 5.8 \times 10^7\ [\mathrm{S/m}]$ である．次の周波数におけるスキンデプスを求めなさい．

$f = 1\ \mathrm{MHz}\ ,\ f = 10\ \mathrm{MHz}\ ,\ f = 100\ \mathrm{MHz}\ ,\ f = 1000\ \mathrm{MHz}$

2.19 メッキの厚さは通常スキンデプス程度である．そのような厚さにメッキする理由を述べよ．

<ポインティング電力>

2.20 複素ポインティングベクトルの値とポインティングベクトルの時間平均した値の間に成り立つ関係式を示しなさい．

2.21 複素ポインティングベクトルの利点は何か？

3. 境界条件

3.1　2つの異なる誘電体媒質の境界における電界と磁界の境界条件を導出しなさい．ただし，境界面には電流や電荷が無いものとする．

3.2　誘電体と金属が接している．この境界面における電界と磁界の境界条件を導出しなさい．

4. 放射理論に関して

4.1　Maxwellの方程式から電流$\boldsymbol{J}$ によって電界$\boldsymbol{E}$，磁界$\boldsymbol{H}$ が作られると考えられる．ローレンツ条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=0$ を用いてポテンシャルϕ とベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$ に対する波動方程式を導きなさい．

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J},\ \nabla^2\phi+k^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

4.2　２階の微分方程式 $\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}$ の解が $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_v\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{r}e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dv'$ となることを示しなさい．ただし，$\boldsymbol{r}$は観測点の位置ベクトル，$\boldsymbol{r}'$は電流源の位置ベクトル，積分は電流源にわたる体積積分である．

4.3　ベクトルポテンシャルが求まったとすると，電磁界はローレンツ条件より，以下の式で与えられることを示しなさい．

$$\boldsymbol{E}=-j\omega\left(\boldsymbol{A}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)\qquad\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}$$

線状アンテナに関して

4.4　ベクトルポテンシャルのｚ成分が$A_z=\dfrac{\mu_0 I\ell}{4\pi r}e^{-jkr}$ にて与えられるとき，球座標でA_r, A_θ, A_φ成分を求めよ．また，このベクトルポテンシャルを使って球座標系で電界の成分を導出しなさい．次に，磁界の成分を導出しなさい．

4.5　上記の問題で，$1/r$，$1/r^2$，$1/r^3$の項に分けたとき，$1/r$ の項目は放射界をいう．放射界（電界成分と磁界成分）を導出しなさい．これらの成分の間に成り立つ関係を求めよ．

$$E_\theta=j\frac{\eta Il}{2\lambda r}e^{-jkr}\sin\theta\ ,\ H_\varphi=j\frac{Il}{2\lambda r}e^{-jkr}\sin\theta$$

4.6　微小線状アンテナの放射界によるポインティングベクトルを求めよ．また，そのベクトルを球面全体にわたって積分することにより，放射される全電力を導出しなさい．

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right)=\boldsymbol{a}_r\frac{\eta\left(I\ell\right)^2}{8\lambda^2r^2}\sin^2\theta,\ W=\iint_S\boldsymbol{S}(\theta,\varphi)\cdot d\boldsymbol{S}=40\pi^2I^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

4.7　ポインティングベクトルが次式で与えられる場合，放射される全電力を求めよ．

4.7.1　$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}_rS_r(\theta,\varphi)=\boldsymbol{a}_r\dfrac{A_0}{r^2}\ [W/m^2]$　　$4\pi A_0$

4.7.2　$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}_rS_r(\theta,\varphi)=\boldsymbol{a}_r\dfrac{A_0\sin\theta}{r^2}\ [W/m^2]$　　π^2A_0

4.7.3　$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_r S_r(\theta, \varphi) = \boldsymbol{a}_r \dfrac{A_0 \sin^2\theta}{r^2}$ [W/m²]　　$\dfrac{8\pi}{3} A_0$

4.8　長さ L のz軸上の電流 $I(z)$ によって放射される電界は

$$E_\theta = j\frac{\eta \sin\theta}{2\lambda r} e^{-jkr} \int_{-L/2}^{L/2} I(z)\, e^{jkz\cos\theta}\, dz$$

にて与えられる．もし電流分布が次式で与えられた場合，放射電界を計算しなさい．

4.8.1　$I(z) = I_0$　　4.8.2　$I(z) = I_0 \exp(-j\varphi z)$

4.8.3　$I(z) = I_0 \cos kz$　　4.8.4　$I(z) = I_0 \sin\left[k\left(\frac{L}{2} - |z|\right)\right]$

4.9　指向性利得は次式で定義される．ただし，$S(\theta, \phi)$ はポインティングベクトル，$d\Omega$ は立体角について

$$D = \frac{S(\theta,\phi)_{\max}}{S(\theta,\phi)_{average}} = \frac{S(\theta,\phi)_{\max}}{\frac{1}{4\pi}\iint_{4\pi} S(\theta,\phi)\, d\Omega}$$

の積分である．

以下の場合に指向性利得を求めなさい．

4.9.1　$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_r S_r(\theta, \varphi) = \boldsymbol{a}_r \dfrac{A_0}{r^2}$ [W/m²]　　$D = 1$

4.9.2　$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_r S_r(\theta, \varphi) = \boldsymbol{a}_r \dfrac{A_0 \sin\theta}{r^2}$ [W/m²]　　$D = \dfrac{4}{\pi}$

4.9.3　$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_r S_r(\theta, \varphi) = \boldsymbol{a}_r \dfrac{A_0 \sin^2\theta}{r^2}$ [W/m²]　　$D = \dfrac{3}{2}$

アレイアンテナに関して

4.10　z 軸の直線上に並んだ2N+1個の等方性放射素子からなるアレイアンテナを考える．原点に置かれた素子からの放射電界を $E = K\dfrac{I_0}{r} e^{-jkr}$ とする．各素子間隔を $d = \dfrac{\lambda}{2}$ として，等振幅の電流 I_0 が流れているとき，z 軸から角度 θ だけ傾いた遠方における放射合成電界を求めなさい．このアレイアンテナのアレイファクターとその最大値を求めなさい．

4.11　同位相で励振した場合，波長に比べてアレイの長さが長いほど，指向性は鋭くなる．あるいは大きな開口のアンテナほど指向性が鋭い．このことをフーリェ変換の性質から定性的に説明しなさい．

4.12　z 軸の直線上に並んだ5個の等方性放射素子からなるアレイアンテナを考える．各素子間隔を $d = \dfrac{\lambda}{2}$ として，素子ごとに $I = I_0 \exp(-j\varphi z)$ の位相が変化する電流が流れているときの放射パターンを求めなさい．

5.　伝搬，反射と透過

5.1　フリスの伝達公式について説明しなさい．

送信電力 P_t，利得 G_1 の送信アンテナから距離 r 離れた場所に置かれた有効面積 A_{e2}，利得 G_2 の受信アンテナに受信される電力 P_r の表現式を求めなさい．次に，自由空間での伝搬損失（波長，伝搬距離に対する依存性）について説明しなさい．

5.2　自由空間の伝搬損失から，f=1000 MHz　で5 kmの距離を伝搬させると何dB減衰するか？

5.3　完全導体の平面に平面波が空気中から垂直入射したとき，境界の近くの電界分布の式を導きなさい．表面から離れるにしたがって電界はどのような強度変化をするか？

（ヒント：全電界＝入射波＋反射波）

5.4　完全導体の平面に平面波が空気中から斜め入射したとき，境界の近くの電界分布の式を導きなさい．垂直入射の場合と比べてどのような特徴があるか？

5.5　誘電体の平面に平面波が空気中から垂直入射したとき，反射係数と透過係数を導出しなさい．これらの係数を媒質の固有インピーダンス($\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ ，$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$)で表現しなさい．

5.6　誘電体の平面に水平偏波の平面波が空気中から入射角 θ で斜め入射したとき，反射係数と透過係数を導出しなさい．

5.7　誘電体の平面に垂直偏波の平面波が空気中から入射角 θ で斜め入射したとき，反射係数と透過係数を導出しなさい．

5.8　入射角 θ によって反射係数の値が変わる．上の媒質を空気，下の媒質の誘電率，透磁率，導電率が次の値をもつものと仮定して数値を代入して反射係数と透過係数の値を求めよ．

$(\varepsilon_r, \mu_r, \sigma) = (9,1,0), (4,1,0), (9,1,1), (4,1,1)$　frequency=10 MHz, 1000 MHz

5.9　反射係数を 0 とする入射角をBrewster角という．Brewster角の得られる偏波と，その角度と比誘電率の間に成り立つ関係式を示しなさい．

5.10 ハイトパターンとは何か？

5.11 電離層によって短波（数10 MHzまで）は反射され，VHF帯以上の周波数は反射されない．その理由を述べよ．

6.　計測システムに関して

6.1　レーダ方程式について説明しなさい．ターゲットの電力反射係数を σ とするとき，送信電力 P_t ，利得 G_1 の送信アンテナから距離 r 離れた位置にあるターゲットからの受信電力の表現式を導きなさい．また，自由空間での伝搬損失（波長，伝搬距離に対する依存性）についてフリスの伝達公式と比較して説明しなさい．

6.2　レーダとは何か？その動作原理について説明しなさい．

6.3　レーダを使ったリモートセンシングの利点，特徴を述べよ．

6.4　偏波とは何を意味するか？直線偏波とはどのような偏波か？円偏波とはどのような偏波か？