

伝送線路の基礎理論

伝送線路とは信号（電磁波）を線路に沿って伝えるもので、平行2線、同軸線路、ストリップライン、導波管、光ファイバなどがある。いずれも波長に対して十分長い線路であり、低周波の電気回路理論では取り扱うことはできない。線路の長さが波長よりも大きいと、キルヒホッフの電圧・電流則を適用しようにも場所によって電圧・電流値が異なるため、不可能となる。ここでは、平行2線、同軸線路など2つの導体でできた伝送線路を支配している基礎方程式とその解について考察してみよう。

電気回路理論から、図1のように線路を簡単なモデルに置き換え、そこでの電圧と電流の関係を調べてみる。最初に、電圧と電流は $e^{j\omega t}$ で振動しているとする。そして線路は z 方向に一様で無限に長いと仮定し、単位長さ当たり、それぞれ R, G, C, L の抵抗、コンダクタンス、インダクタンス、キャパシタンスを持っていると仮定する。その線路の一部区間 Δz を取り出してみる。この区間内では電気回路理論が成り立つほど、長さ Δz は波長より十分短いと仮定する。そこで電圧と電流の関係をみると、キルヒホッフの法則から、

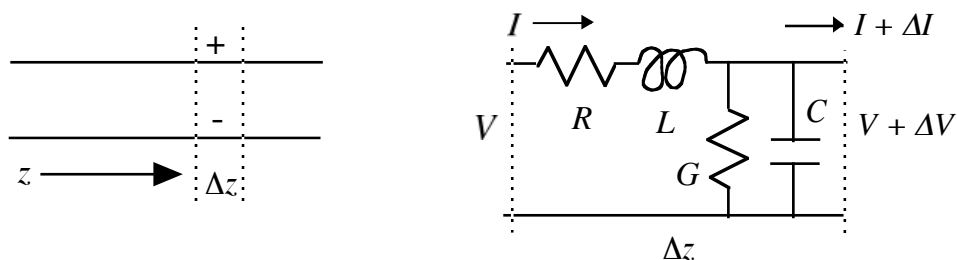


図1 伝送線路（分布定数回路）のモデル化

$$V \approx V + \Delta V + (R + j\omega L) \Delta z I, \quad I \approx I + \Delta I + (G + j\omega C) \Delta z V \quad (1)$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta z} \approx -(R + j\omega L) I, \quad \frac{\Delta I}{\Delta z} \approx -(G + j\omega C) V$$

$\Delta z \rightarrow 0$ の極限では、(1)は微分方程式に置き換わり、(2)となる。

$$\frac{dV}{dz} = -(R + j\omega L) I, \quad \frac{dI}{dz} = -(G + j\omega C) V \quad (2)$$

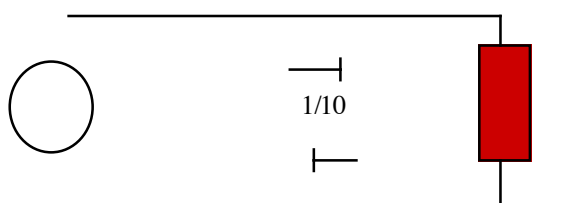
両辺をもう一度、 z で微分すると

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -(R + j\omega L) \frac{dI}{dz} = (R + j\omega L) (G + j\omega C) V = \gamma^2 V$$

$$\frac{d^2 I}{dz^2} = -(G + j\omega C) \frac{dV}{dz} = (R + j\omega L) (G + j\omega C) I = \gamma^2 I$$

$$\gamma^2 = (R + j\omega L) (G + j\omega C) \quad (3)$$

したがって、同じ形の2階の微分方程式が得られる。



$$\frac{d^2 V}{dz^2} = \gamma^2 V, \quad \frac{d^2 I}{dz^2} = \gamma^2 I \quad (4)$$

さて、式(4)は2階の微分方程式だから2つの独立解がでてくる。この微分方程式を満たす関数系は

$$\exp(\gamma z), \quad \exp(-\gamma z)$$

の2つがある。そこで、振幅を未定定数として、電圧の解を

$$V(z) = V_1 \exp(-\gamma z) + V_2 \exp(+\gamma z) \quad (5)$$

とおいてみる。これに対応する電流の解は、式(2)に戻り、

$$I = \frac{-1}{(R + j\omega L)} \frac{dV}{dz} = \frac{\gamma}{(R + j\omega L)} \left[V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{+\gamma z} \right] = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} \left[V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{+\gamma z} \right]$$

となる。

$$\begin{aligned} \text{さて,} \quad Z_0 &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} : \text{特性インピーダンス} \\ \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta : \text{伝搬定数} \end{aligned}$$

$$\text{とおけば,} \quad V(z) = V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{+\gamma z} \quad (6)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} \left[V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{+\gamma z} \right] \quad (7)$$

が得られる。

この解から、電圧や電流の振る舞いを考察する。瞬時値としての観測量は

$$v(z, t) = \text{Re} \left\{ V(z) e^{j\omega t} \right\} \quad i(z, t) = \text{Re} \left\{ I(z) e^{j\omega t} \right\} \quad (8)$$

にて与えられるので、 $V_1 e^{-\gamma z}$ の項についてその性質を調べてみよう。電圧の観測量は

$$v_1(z, t) = \text{Re} \left\{ V_1 e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ V_1 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right\} = V_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (9)$$

と展開でき、時間と距離の関数になっている。伝搬定数 $\gamma = \alpha + j\beta$ が複素数にて与えられているので少しわかりにくい。そこで、現象を分かりやすくするために線路を理想化して、完全導体でできており、損失がないと仮定しよう。この条件はそれぞれ、 $R=0$ 、 $G=0$ に相当する。この条件もとでは($R \neq 0$, $G \neq 0$ のケースは後で考えることにする。)

$$R = G = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = j\beta = j\omega \sqrt{LC}, \quad \text{ただし, } \beta = \omega \sqrt{LC}$$

電圧は次の表示になる。

$$v_1(z, t) = V_1 \cos(\omega t - \beta z) \quad (10)$$

t をパラメータとして z を変化させたときの様子を図 2 に示す.

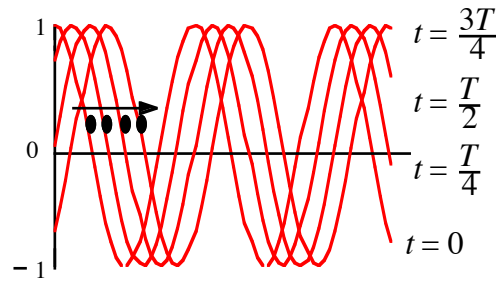


図 2 $v_1(z, t) = V_1 \cos(\omega t - \beta z)$ の変化

この図から, t を増加させてゆくとの正の方向に動いていく様子が分かる. つまり, 波としての正方向に移動している. 速度はどのくらいであろうか? それを求めるために, ちょうどウインドサーフィンで波のある一点●に乗って, 動いたとしよう. その点では波と共に動くから, 時間的に波の中の相対位置は変わらない. このことは, 数学的には時間微分が 0 に相当する.

この関数では, ある点●は, ある位相 $\theta_1 = \omega t - \beta z$ に対応するから, この時間微分を取ると,

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0 = \omega - \beta \frac{dz}{dt} \quad , \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11)$$

$\frac{dz}{dt}$ は速度を表しているので, $v_1(z, t) = V_1 \cos(\omega t - \beta z)$ は z の正の方向に速度 $\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ で移動する波を表していることになる. 逆に, $v_2(z, t) = V_2 \cos(\omega t + \beta z)$ は z の負の方向に速度 $\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ で移動する波を表している.

したがって, 指数表現で示される $e^{j(\omega t - \beta z)}$ は z の正の方向, $e^{j(\omega t + \beta z)}$ は z の負の方向に進む波であることが分かる. 時間因子 $e^{j\omega t}$ は共通に入っているので, フェザー表現で

$$e^{-j\beta z} \quad \text{の正方向に進む波} \quad (12)$$

$$e^{+j\beta z} \quad \text{の負方向に進む波} \quad (13)$$

と理解しても良い.

変数の変更

次に、負荷側から距離を測る表現に変えてみる。これは、負荷端子から電源側に向かって距離を取った方が便利な点が多いためである。そこで、変数を z から x に変更する。

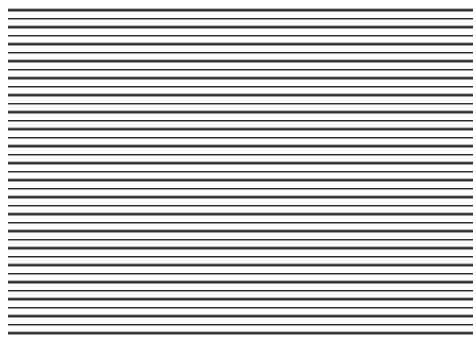


図3 伝送線路につなされた負荷

線路の長さが l ならば、 $z = l - x$ となる。これを代入すると

$$V(x) = V_1 e^{j\beta(l-x)} + V_2 e^{-j\beta(l-x)} = V_1 e^{-j\beta l} e^{j\beta x} + V_2 e^{j\beta l} e^{-j\beta x}$$

$V_1 e^{-j\beta l}$ は負荷側に入射してくる電圧の係数、 $V_2 e^{j\beta l}$ は遠ざかる電圧の係数なので

$V_i = V_1 e^{-j\beta l}$, $V_r = V_2 e^{j\beta l}$ とおくと

$$V(x) = V_i e^{j\beta x} + V_r e^{-j\beta x} \quad (14)$$

対応する電流は
$$I(x) = \frac{1}{Z_0} (V_i e^{j\beta x} - V_r e^{-j\beta x}) \quad (15)$$

と表現することができる。式 (6), (7) と同じことを表しているが、この表現は負荷側から見た入射と反射の電圧電流の関係を示したもので、負荷側からの測定には都合がよい。

さらに、いくつかの線路が直列に接続された場合を想定して、任意位置の電圧電流表現を導いておく。式 (14) を変形して

$$V(x) = V_i e^{j\beta x} + V_r e^{-j\beta x} = (V_i + V_r) \cos \beta x + j(V_i - V_r) \sin \beta x$$

$x = 0$ において負荷端子に現れる電圧が V_R 、電流が I_R とすると

$$V_R = V_i + V_r, \quad Z_0 I_R = V_i - V_r$$

入射する電圧と反射する電圧は次のように書くことができる。

$$V_i = \frac{V_R + Z_0 I_R}{2}, \quad V_r = \frac{V_R - Z_0 I_R}{2}$$

それゆえ、負荷側からの距離 x と負荷側の電圧、電流による表現は次のようになる。

$$V(x) = V_R \cos \beta x + j Z_0 I_R \sin \beta x \quad (16)$$

$$Z_0 I(x) = Z_0 I_R \cos \beta x + j V_R \sin \beta x \quad (17)$$

反射係数 Γ_V による表現

反射係数は

$$\Gamma_V = \frac{V_r}{V_i} = \frac{V_R - Z_0 I_R}{V_R + Z_0 I_R} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} \quad (18)$$

によって与えられる。これを使うと電圧、電流は次のように表現される。

$$V(x) = V_i \left(e^{j\beta x} + \Gamma_V e^{-j\beta x} \right) = V_i e^{j\beta x} \left(1 + \Gamma_V e^{-j2\beta x} \right) \quad (19)$$

$$Z_0 I(x) = V_i \left(e^{j\beta x} - \Gamma_V e^{-j\beta x} \right) = V_i e^{j\beta x} \left(1 - \Gamma_V e^{-j2\beta x} \right) \quad (20)$$

この形式は一見複雑そうに見えるが、図で表すと本質が理解しやすい。図4を参照。

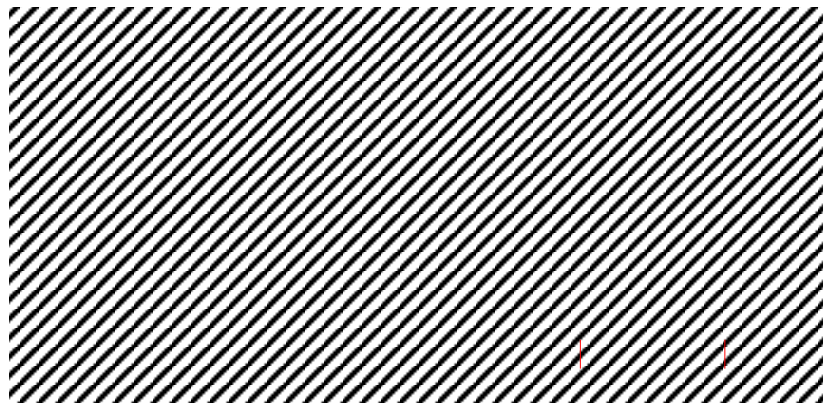
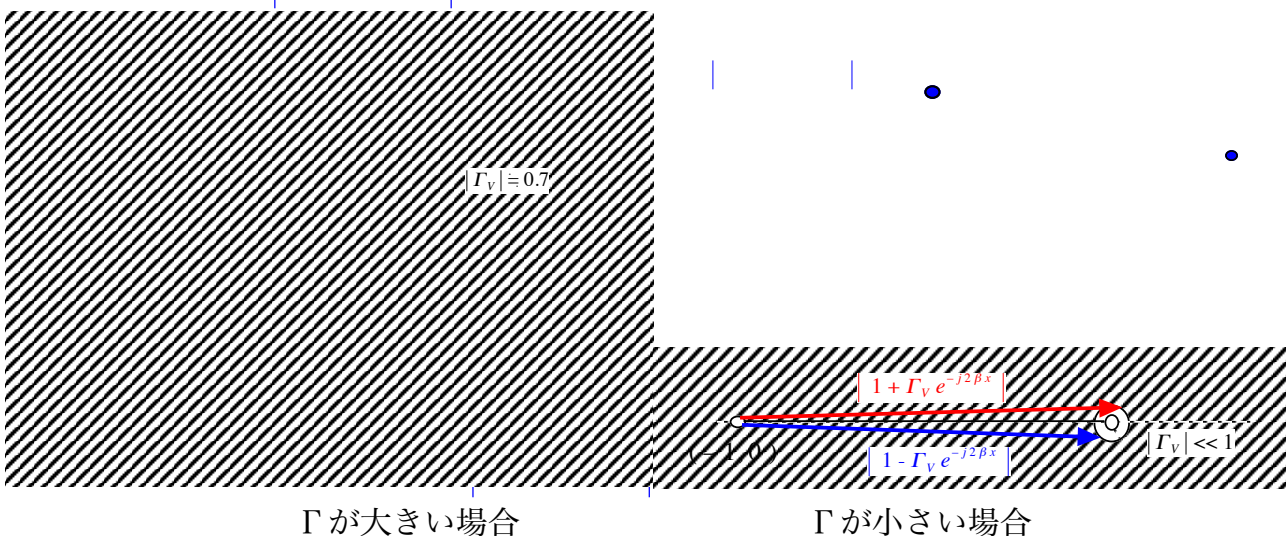


図4 電圧電流の図解

複素平面の(-1.0)の点から原点(0,0)に直線を引くとその線の長さは1となる。原点から反射係数 Γ の位置に点をとる。 Γ の大きさは1より小さい。そして位相を $2\beta x$ だけ時計回りに回転すると $(1 + \Gamma_V e^{-j2\beta x})$ の点を得られる。この点と(-1.0)の点からの距離が $|1 + \Gamma_V e^{-j2\beta x}|$ となり、これは式(19)にもあるように、電圧の大きさに対応する。一方、 $|1 - \Gamma_V e^{-j2\beta x}|$ の距離は電流の大きさに対応する。図4で示した赤色と青色のベクトルの長さが電圧、電流の大きさに比例している。また、図から電圧と電流の位相差も理解できる。自転車のペダルを回しているようにxの位置に応じて位相 $2\beta x$ が回転してゆく。



Γ が大きい場合

Γ が小さい場合

もし、反射係数の大きさが変わると上図のようになることが了解できるであろう。 Γ の大きさは1以下なので半径1より小さい円を描く。1に近い場合は、インピーダンスの不整合が大きく、0に近い場合は整合している。整合している場合は電圧電流の大きさの変化は無いこともベクトルの長さから理解できると思われる。

(19), (20)を使って変形すると各種のパラメータが表現できる。

インピーダンス

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_0 \frac{V_R \cos \beta x + j Z_0 I_R \sin \beta x}{Z_0 I_R \cos \beta x + j V_R \sin \beta x}$$

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_R + j Z_0 \tan \beta x}{Z_0 + j Z_R \tan \beta x} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_V e^{-j2\beta x}}{1 - \Gamma_V e^{-j2\beta x}} \quad (21)$$

正規化インピーダンス

$$z(x) = \frac{Z(x)}{Z_0} = \frac{z_R + j \tan \beta x}{1 + j z_R \tan \beta x}$$

定在波比

$$S = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_V|}{1 - |\Gamma_V|} \geq 1 \quad |\Gamma_V| = \frac{S - 1}{S + 1} \quad (22)$$

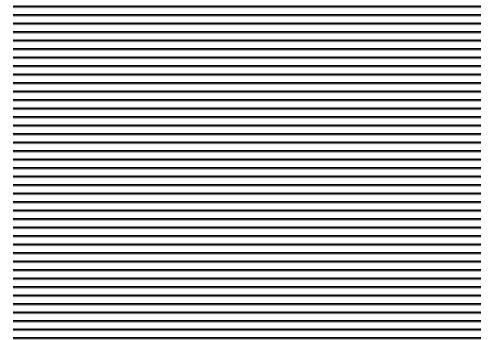
電圧電流分布の具体例

(1) $Z_R = Z_0$ (インピーダンス整合)

$$\Gamma_V = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = 0$$

$$V(x) = V_i e^{j\beta x} \quad |V(x)| = V_i = \text{const}$$

$$Z_0 I(x) = V_i e^{j\beta x}$$

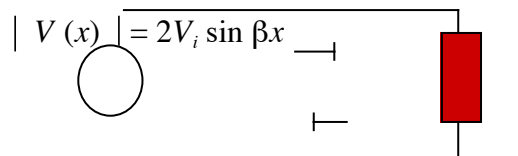


(2) $Z_R = 0$ (短絡)

$$\Gamma_V = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = -1$$

$$V(x) = V_i (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) = j 2V_i \sin \beta x$$

$$Z_0 I(x) = V_i (e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) = 2V_i \cos \beta x$$



(3) Z_R $|V(x)| = V_i |1 + \Gamma_V e^{-j2\beta x}|$ $|Z_0 I(x)| = V_i |1 - \Gamma_V e^{-j2\beta x}|$

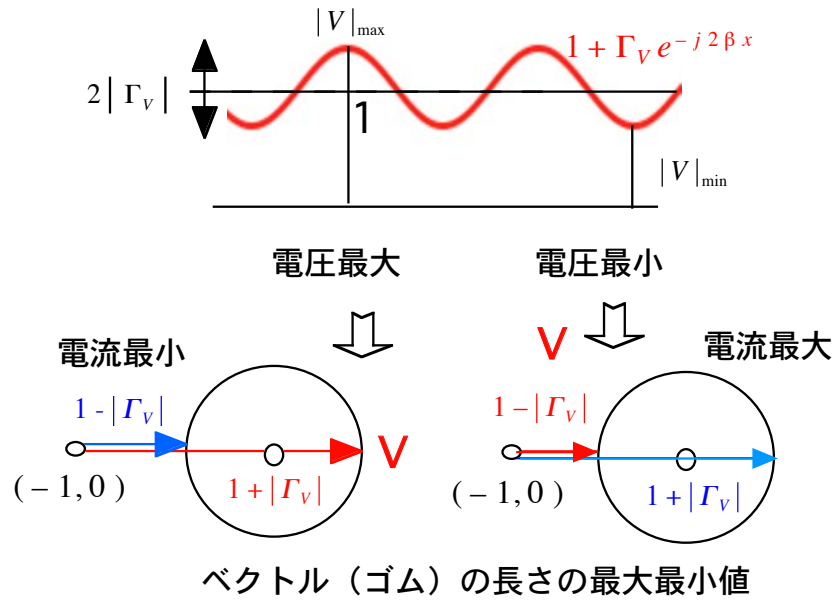


図5 線路に沿う電圧の変化

電圧は線路に沿って図5のように振動を繰り返す。そして、電圧最小点や最大点では下の図のようなベクトルの状態になっている。測定では 定在波比(VSWR: Voltage Standing Wave Ratio) S が測定しやすい。そこで、電圧最小点の位置 $l_{\min}$ と定在波比 S （電圧の最大・最小の比）を求めれば、

$$S = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_V|}{1 - |\Gamma_V|} = \frac{Z_0 |I|_{\max}}{|V|_{\min}} = \frac{Z_0}{Z_{\min}} = \text{real} \quad (23)$$

となっており、

$$\frac{1}{S} = \frac{1 - |\Gamma_V|}{1 + |\Gamma_V|} = \frac{|V|_{\min}}{Z_0 |I|_{\max}} = \frac{Z_{\min}}{Z_0} = \text{real}, \quad z_{\min} = \frac{1}{S} = \frac{z_R + j \tan \beta l_{\min}}{1 + j z_R \tan \beta l_{\min}}$$

$$z_R = \frac{1 - j S \tan \beta l_{\min}}{S - j \tan \beta l_{\min}} \quad (24)$$

だから、式 (24) によって負荷インピーダンスを求めることができる。

電力について

瞬時電力 $p(t)$ は時間関数としての電圧と電流の積で与えられるので、瞬時電力は時間に対して線形な関数でない、

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (25)$$

平均電力の流れ P はこの瞬時電力を 1 周期にわたって、積分すれば得られる。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t) d(\omega t) \quad (26)$$

いま、 $v_1(z, t) = |V_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_1)$

$$i_1(z, t) = |I_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_1')$$

とすると

$$\begin{aligned} p_1(z, t) &= \frac{1}{2} |V_1| |I_1| e^{-2\alpha z} \left[\cos(\theta_1 - \theta_1') + \cos(2\omega t - 2\beta z + \theta_1 + \theta_1') \right] \\ P_1(z) &= \frac{1}{2} |V_1| |I_1| e^{-2\alpha z} \cos(\theta_1 - \theta_1') \end{aligned} \quad (27)$$

同様に

$$v_2(z, t) = |V_2| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_2)$$

$$i_2(z, t) = |I_2| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_2')$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2} |V_2| |I_2| e^{2\alpha z} \cos(\theta_2 - \theta_2') \quad (28)$$

$$\theta_1 - \theta_1' = \arg(Z_0) = \arg\left(\sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}\right) \quad \theta_2 - \theta_2' = \arg(-Z_0) = \pi + \arg\left(\sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}\right)$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \arg\left(\sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}\right) \leq \frac{\pi}{4}$$

だから位相の値から、

$$P_1(z) \geq 0 \quad P_2(z) \leq 0$$

となる。したがって、進行波と後進波の組み合わせとして

$$v(z, t) = v_1(z, t) + v_2(z, t) \quad i(z, t) = i_1(z, t) + i_2(z, t)$$

としても

$$P(z) = \frac{1}{2} |V_1| |I_1| e^{-2\alpha z} \cos(\theta_1 - \theta_1') + \frac{1}{2} |V_2| |I_2| e^{-2\alpha z} \cos(\theta_2 - \theta_2') = P_1(z) + P_2(z) \quad (29)$$

となって独立である。つまり、独立に電力が運ばれることを意味している。

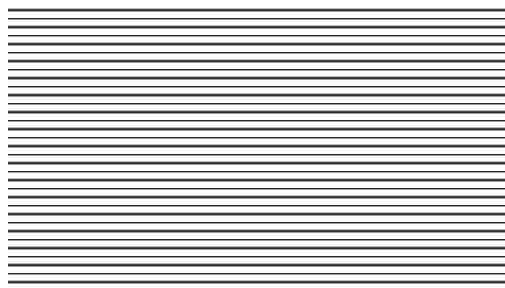


図6 電力の配分

負荷端での電力反射係数

負荷に入射する電力と反射する電力の比を Γ_p とすると

$$\Gamma_p = \left| \frac{P_r(x)}{P_i(x)} \right|_{x=0} = \left| \frac{V_r}{V_i} \right| \left| \frac{I_r}{I_i} \right| = |\Gamma_0|^2 \quad (30)$$

$\theta_1 - \theta_1' = \arg(Z_0) = \arg\left(\sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}\right) = 0$ なら, つまり, $Z_0 = real$ で $\alpha = 0$ のとき,

電源から負荷に向かう正味の電力は

$$P(z) = \frac{1}{2} |V_1| |I_1| - \frac{1}{2} |V_2| |I_2| = P_i (1 - \Gamma_p) = P_i \left(1 - |\Gamma_0|^2\right) \quad (31)$$

したがって, 負荷に電力を有効に供給するためには反射係数を抑えなくてはならない.

$$\Gamma_v = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}$$

そのためにはインピーダンス整合 $Z_R = Z_0$ が重要である.

また, 反射係数に関わらず, 負荷に一定電力を与えるためには, 電源側で

$$P_i = \frac{P_0 : const}{1 - |\Gamma_0|^2} \quad (32)$$

の電力を供給してやらなくてはならない. ミスマッチが大きいと多大な電力が必要である. 人間の意志疎通も人間関係も, この反射係数と供給電力のように似た関係がある.

アンテナに用いるパラメータ

設計目標

	定義	dB表示	大きさ	$\Gamma = 0.1$
電圧反射係数 Γ	$\Gamma = \frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0}$	$20 \log \Gamma $	≤ 0	- 20 dB
VSWR S	$S = \frac{1 + \Gamma }{1 - \Gamma }$		$S \geq 1$	$S = 1.222$
反射減衰量 (リターンロス)	$L_R = \frac{1}{ \Gamma }$	$L_R = -20 \log \Gamma $	≥ 0	+ 20 dB
電力透過係数	$T = \left(1 - \Gamma ^2\right) = \frac{4S}{(1+S)^2}$	$10 \log T$	≤ 0	- 0.0436 dB
反射損	$M = \frac{1}{T}$	$10 \log M$	≥ 0	+ 0.0436 dB
負荷への入力電力	$P_{in} = P_0 \left(1 - \Gamma ^2\right)$		$P_{in} \leq P_0$	Pin= 0.99 Po
電源供給電力	P_0			

Γ	$20 \log \Gamma $	VSWR	Pin/Po (%)	Γ	$20 \log \Gamma $	VSWR	Pin/Po (%)
0.01	-40	1.02	99.99	0.26	-11.7	1.7	93.24
0.02	-33.98	1.04	99.96	0.27	-11.4	1.74	92.71
0.03	-30.46	1.06	99.91	0.28	-11.1	1.78	92.16
0.04	-27.96	1.08	99.84	0.29	-10.8	1.82	91.59
0.05	-26.00	1.11	99.75	0.3	-10.46	1.86	91
0.06	-24.44	1.13	99.64	0.31	-10.17	1.9	90.39
0.07	-23.10	1.15	99.51	0.32	-9.90	1.94	89.76
0.08	-21.94	1.17	99.36	0.33	-9.63	1.99	89.11
0.09	-20.92	1.20	99.19	0.34	-9.37	2.03	88.44
0.10	-20	1.22	99	0.35	-9.12	2.08	87.75
0.11	-19.17	1.25	98.79	0.36	-8.87	2.13	87.04
0.12	-18.42	1.27	98.56	0.37	-8.64	2.17	86.31
0.13	-17.72	1.30	98.31	0.38	-8.4	2.23	85.56
0.14	-17.08	1.33	98.04	0.39	-8.18	2.28	84.79
0.15	-16.48	1.35	97.75	0.4	-7.96	2.33	84
0.16	-15.92	1.38	97.44	0.41	-7.74	2.39	83.19
0.17	-15.39	1.41	97.11	0.42	-7.54	2.45	82.36
0.18	-14.89	1.44	96.76	0.43	-7.33	2.5	81.51
0.19	-14.42	1.47	96.39	0.44	-7.13	2.57	80.64
0.2	-13.98	1.5	96	0.45	-6.94	2.64	79.75
0.21	-13.56	1.53	95.59	0.46	-6.74	2.7	78.84
0.22	-13.15	1.56	95.16	0.47	-6.56	2.77	77.91
0.23	-12.77	1.60	94.71	0.48	-6.38	2.85	76.96
0.24	-12.40	1.63	94.24	0.49	-6.2	2.92	75.99
0.25	-12.04	1.67	93.75	0.5	-6.02	3	75