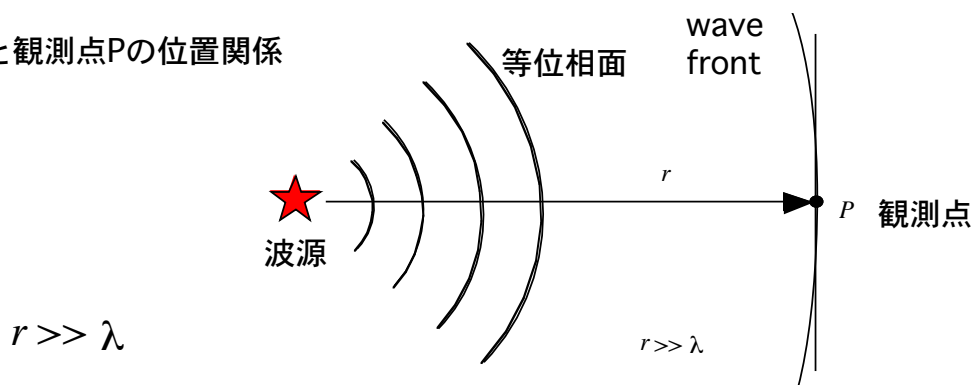


波動方程式と解：平面波－球面波

波源と観測点Pの位置関係



波源から十分遠い観測点 P の近傍では、局所的に波は平面的になっている

波動方程式を解く順序

はじめに波動方程式を導出し、それを解くことによって
平面波の数学的・物理的な性質を理解する (平面波の方が簡単)

その後、球面波の波動方程式とその解について理解する

1

Maxwell's Equation

$\mathbf{r}$ 位置ベクトル

t 時間

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$\mathbf{E}$ 電界

$\mathbf{H}$ 磁界

$\mathbf{D}$ 電束密度

$\mathbf{B}$ 磁束密度

$\mathbf{J}$ 電流密度

ρ 電荷密度

構成方程式

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

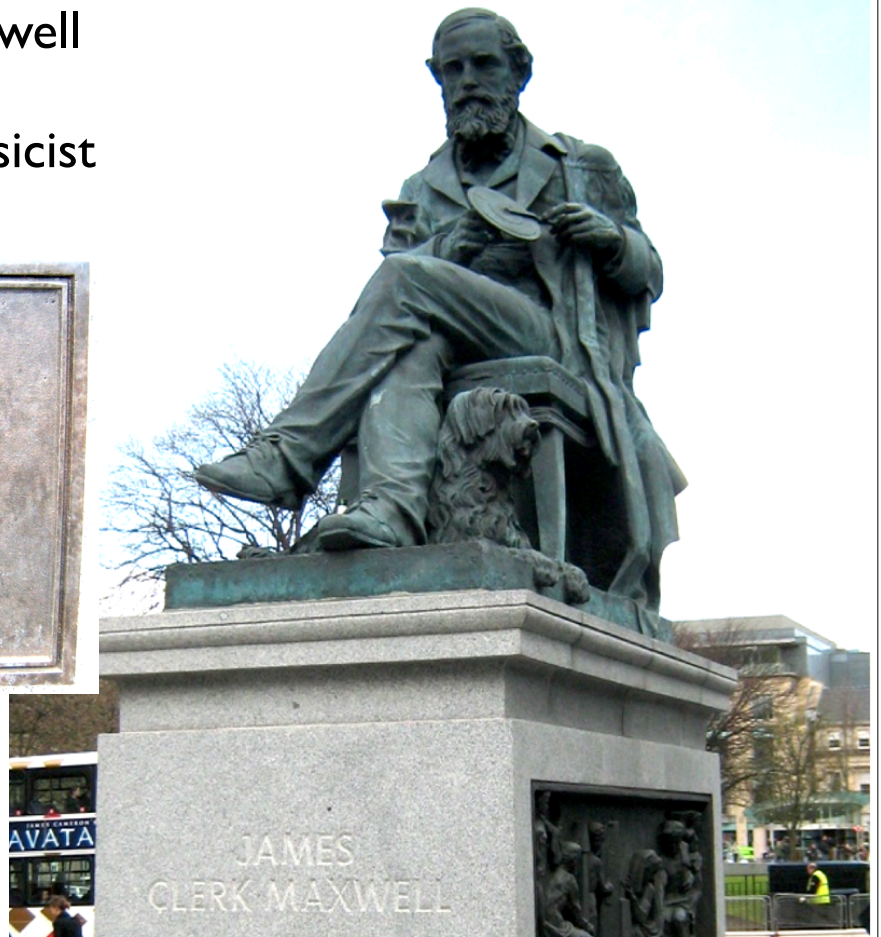
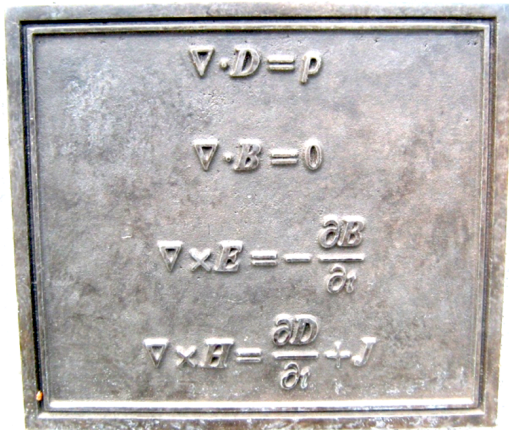
$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 誘電率

$\mu = \mu_0 \mu_r$ 透磁率

σ 導電率

すべて、空間と時間の関数である。

James Clerk Maxwell
1831-1879
Mathematical Physicist
Scotland



方程式を解く前に

波動方程式

E
H
D
B
J

は、一般的に位置と時間の関数 ($\mathbf{r}, t$: 4 変数) として表されるだろう
(変数を減らしたい)

これらのベクトルを $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ として表すと

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(x, y, z, t) = a_x A_x(x, y, z, t) + a_y A_y(x, y, z, t) + a_z A_z(x, y, z, t)$$

時間的に調和振動を仮定 $\Rightarrow e^{j\omega t}$ と表現可能

観測量は実数なので以下のように書ける

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = a_x A_{mx} \cos(\omega t + \theta_x) + a_y A_{my} \cos(\omega t + \theta_y) + a_z A_{mz} \cos(\omega t + \theta_z)$$

例えば x 成分を
変形してみる

$$\begin{aligned} A_{mx} \cos(\omega t + \theta_x) &= \operatorname{Re} \left[A_{mx} e^{j(\omega t + \theta_x)} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[A_{mx} (\cos \theta_x + j \sin \theta_x) e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[(A_{mx} \cos \theta_x + j A_{mx} \sin \theta_x) e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[(A_{rx} + j A_{ix}) e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\dot{A}_x e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

A_{mx} は振幅 (実数)

$\dot{A}_x$ は複素振幅

ベクトルは各成分の合成となるので、ベクトル表記では

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right]$$

ただし $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = a_x \dot{A}_x + a_y \dot{A}_y + a_z \dot{A}_z$

$$\dot{A}_x = A_{rx} + j A_{ix}, \quad \dot{A}_y = A_{ry} + j A_{iy}, \quad \dot{A}_z = A_{rz} + j A_{iz}$$

Phasor 表現の導入へ

フェザー(Phasor)表現

場のベクトルの複素表現として $A(\mathbf{r})e^{j\omega t}$ を仮定すると

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})$$

は複素数の成分をもつベクトルで、時間因子の項を取り除いたもの

(3変数だけになる)

Phasor表現の利点



- (1) Phasor表現を使うと微分方程式において、時間に関する微分演算が代数演算に置き換わり、計算が簡単になる。
- (2) 観測量を求めるには、フェザー表現を使って代数解析し、その解に $e^{j\omega t}$ を掛けて実部をとれば得られる

Phasor表現の利点 (1)

(1) 時間に関する微分演算が代数演算になる

例えば $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ に Phasor表現を使うと

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t} = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow j\omega \text{ になる}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

← Maxwell equationで時間項が
 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ なくなる

など位置だけの関数となる
時間因子は含まれない

→ 3変数
空間だけの微分方程式を解く問題へ帰着

Phasor表現の利点 (2) は解が求まった後に示す。

波動方程式の導出

★ **自由空間中** 自由空間とは、境界がなく、媒質定数が ($\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma = 0$)

★ **Source free** 波源になるものが無い ($J_s = 0, \rho = 0$) で与えられる媒質

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}$$

$$= -j\omega\mu_0 (j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J}) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}$$

ベクトル公式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$



$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s = \sigma \mathbf{E} = 0 \quad \text{となる}$$



$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = 0 \quad \text{となる}$$

$$\therefore \nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} = 0$$

$$\text{同様に } \nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$$



$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$



自由空間中の波動方程式

自由空間中の波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

ラプラシアン演算子 $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$

ベクトル波動方程式

ただし, $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$

直角座標 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

円筒座標 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

球座標 $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

座表系により表現
が異なる

直角座標系で電界の表現は以下の形式になるであろう

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = a_x E_x(\mathbf{r}) + a_y E_y(\mathbf{r}) + a_z E_z(\mathbf{r}) \quad \text{ただし } \mathbf{r} \text{ は位置ベクトルで, } \mathbf{r} = (x, y, z)$$

例えば 電界の x 成分 $E_x(\mathbf{r})$ はこの波動方程式を満たす

$$\nabla^2 E_x(\mathbf{r}) + k^2 E_x(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

3 変数の 2 階微分方程式

y 成分, z 成分も成り立つ

スカラー波動方程式

その解法 $\Rightarrow$

スカラー波動方程式の解法

変数分離法

$$E_x(\mathbf{r}) = X(x) Y(y) Z(z)$$

3変数の各独立関数の積を仮定

といて代入

$$Y(y) Z(z) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) Z(z) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x) Y(y) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k^2 X(x) Y(y) Z(z) = 0$$

 $X(x) Y(y) Z(z)$

で割る

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

各項は各変数から無関係 $\Rightarrow$ 定数でなくてはならない $\Rightarrow$ 各項に定数を割り当てる

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k_x^2$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k_z^2$$

ただし $-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0$ を満たしている必要がある

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

続く

 $X(x)$ の続き変数 x に関して

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k_x^2$$

偏微分方程式

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2 X(x)$$

全微分方程式となる

全微分方程式の解 $X(x) = A_0 e^{-jk_x x} + A_1 e^{jk_x x} = B_0 \cos k_x x + B_1 \sin k_x x$ $A_0 \sim B_1$ は未定定数3変数 (x, y, z) では

$$E_x(\mathbf{r}) = \left(A_0 e^{-jk_x x} + A_1 e^{jk_x x} \right) \left(B_0 e^{-jk_y y} + B_1 e^{jk_y y} \right) \left(C_0 e^{-jk_z z} + C_1 e^{jk_z z} \right)$$

$X(x)$ より $Y(y)$ より $Z(z)$ より

Phasorベクトルとしての解 = $E_x(\mathbf{r}), E_y(\mathbf{r}), E_z(\mathbf{r})$ 成分の和

(注: 次頁)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + E_1 \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z \quad \mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z$$

自由空間中での
ベクトル波動方程式
の解

注：電界のベクトル表記について

$$E_x(\mathbf{r}) = A_0 B_0 C_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} + \dots + A_1 B_1 C_1 e^{jk_x x} e^{jk_y y} e^{jk_z z} \quad A_0 \sim C_1 \text{ 未定定数}$$

などいろいろな項が出てくるが、物理的には次の2つの項目で代表できる

$$A_0 B_0 C_0 \Rightarrow E_{0x} \quad A_1 B_1 C_1 \Rightarrow E_{1x}$$

$$E_x(\mathbf{r}) = E_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} + E_{1x} e^{+j(k_x x + k_y y + k_z z)} = E_{0x} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + E_{1x} \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$\text{同様にy成分についても} \quad E_y(\mathbf{r}) = E_{0y} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + E_{1y} \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$z \text{ 成分} \quad E_z(\mathbf{r}) = E_{0z} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + E_{1z} \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

電界ベクトルは各成分の合成

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x(\mathbf{r}) \mathbf{a}_x + E_y(\mathbf{r}) \mathbf{a}_y + E_z(\mathbf{r}) \mathbf{a}_z$$

$\exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$
 $\exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ の項にまとめると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + E_1 \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$\text{ただし} \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= E_{0x} \mathbf{a}_x + E_{0y} \mathbf{a}_y + E_{0z} \mathbf{a}_z \\ \mathbf{E}_1 &= E_{1x} \mathbf{a}_x + E_{1y} \mathbf{a}_y + E_{1z} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Phasor表現の利点 (2)

(2) Phasorが求まったら観測量は $e^{j\omega t}$ をかけて実部をとる

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + E_1 \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r}) + E_1(\mathbf{r}) \quad \text{複素数}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right\} = E_+(\mathbf{r}, t) + E_-(\mathbf{r}, t) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{観測量となる} \\ \text{実数} \end{array}$$

$E_0 \quad E_1 \quad \mathbf{k}$ が実数のベクトルなら

$$E_+(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ E_0 \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \right\} = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$E_-(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ E_1 \exp[j(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \right\} = E_1 \cos(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

何を表している？

物理的性質を
調べよう

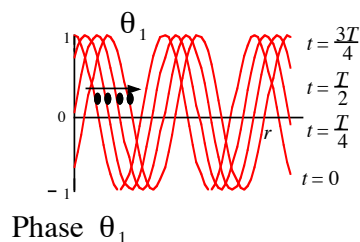
$\mathbf{k}$ と $\mathbf{r}$: 同じ方向を考える $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr$

$$\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Rightarrow \cos(\omega t - kr)$$

$$\cos(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Rightarrow \cos(\omega t + kr)$$

$\cos(\omega t - kr)$ から導かれる事柄

時間 t を変化させてグラフにすると



● が右側に動く

グラフ中の ● 位相を調べる

Phase $\theta_1 = (\omega t - kr)$ とおく

時間的に変化しない点はどうなっているか？

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega - k \frac{dr}{dt} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

速度

自由空間では $\epsilon = \epsilon_0 \quad \mu = \mu_0 \quad \sigma = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ [m/s]} \Rightarrow c \quad \text{光速}$$



位相速度

位相は周波数に関わらず
r 方向に速度 c で移動する



光の電磁波説
by J. C. Maxwell
が導かれる

数式表現

$$E_+(r, t) = \text{Re} \left\{ E_0 \exp \left[j(\omega t - kr) \right] \right\} \\ \Rightarrow E_0 \cos(\omega t - kr)$$

★ 波の進む方向は ω と k の +- 符号で決まる

異なっていれば

$$\frac{dr}{dt} = +c \quad \rightarrow \quad (+) \text{ 正の } r \text{ 方向に進む波}$$

$$E_-(r, t) = \text{Re} \left\{ E_1 \exp \left[j(\omega t + kr) \right] \right\} \\ \Rightarrow E_1 \cos(\omega t + kr)$$

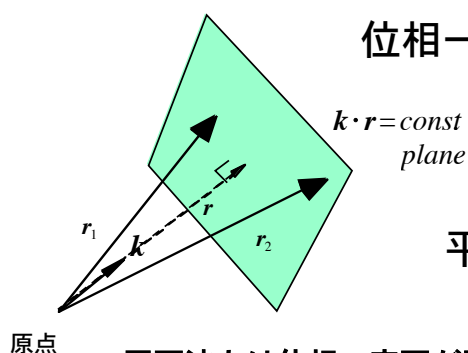
同じなら

$$\frac{dr}{dt} = -c \quad \rightarrow \quad (-) \text{ 負の } r \text{ 方向に進む波}$$

ところで $k \cdot r = k_x x + k_y y + k_z z = \text{constant}$ は 平面の方程式

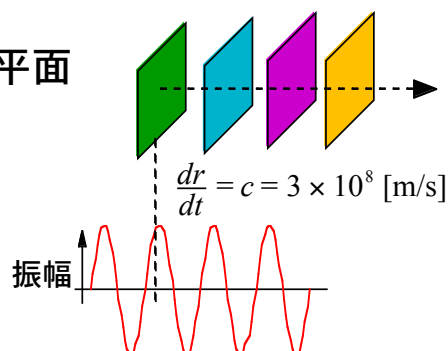
$$= kr \quad (k // r \text{ のとき})$$

同じ位相をもつ面



位相一定面 = 平面

平面波



平面波とは位相一定面が平面になっている波のことである

(+) 正の r 方向に進む平面波について詳細に検討 (自由空間中)

$$E_0(\mathbf{r}) = E_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \{E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z\} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{をmaxwellの方程式に代入してみる}$$

E_0 は定ベクトル

$$\nabla \times E_0(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} & E_y e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} & E_z e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ -jk_x & -jk_y & -jk_z \\ E_x e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} & E_y e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} & E_z e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{vmatrix}$$

$$= -j\mathbf{k} \times E_0(\mathbf{r}) = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}_0(\mathbf{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x} \exp(-jk_x x - jk_y y - jk_z z) = -jk_x \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = -jk_y \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = -jk_z \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow -jk_x \quad \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow -jk_y \quad \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow -jk_z$$

この場合 $(\nabla \Rightarrow -j\mathbf{k})$ に対応している

$$\mathbf{k} \times E_0 = \omega \mu_0 \mathbf{H}_0$$

H_0 は $\mathbf{k}$ と E_0 に直交している

正の r 方向に進む電界の解を代入すると次のベクトル関係式が得られる

$$\nabla \times H_0(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} & H_y e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} & H_z e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ -jk_x & -jk_y & -jk_z \\ H_x e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} & H_y e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} & H_z e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{vmatrix} = -j\mathbf{k} \times H_0(\mathbf{r}) = j\omega \epsilon_0 E_0(\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow -\hat{\mathbf{k}} \times \eta H_0 = \eta H_0 \times \hat{\mathbf{k}} = E_0$$

$$\nabla \cdot D_0(\mathbf{r}) = \frac{\partial D_x e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\partial x} + \frac{\partial D_y e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\partial y} + \frac{\partial D_z e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\partial z} = 0 \Rightarrow -jk_x D_x - jk_y D_y - jk_z D_z = -j\mathbf{k} \cdot D_0(\mathbf{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{k}} \cdot E_0 = 0$$

$$\nabla \cdot B_0(\mathbf{r}) = \frac{\partial B_x e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\partial x} + \frac{\partial B_y e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\partial y} + \frac{\partial B_z e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\partial z} = 0 \Rightarrow -jk_x B_x - jk_y B_y - jk_z B_z = -j\mathbf{k} \cdot B_0(\mathbf{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{k}} \cdot H_0 = 0$$

(+) 正のr方向に進む平面波 $E_0 H_0$ に対して $E_0(r) = E_0 \exp(-jk \cdot r)$

Maxwell eq.

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H$$

$$\nabla \times H = j\omega\varepsilon E + J$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

自由空間での平面波の関係

$$\hat{k} \times E_0 = \eta H_0$$

$$\eta H_0 \times \hat{k} = E_0$$

$$\hat{k} \cdot E_0 = 0$$

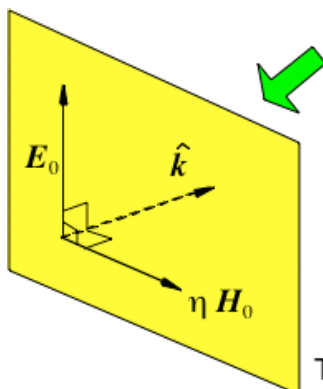
$$\hat{k} \cdot H_0 = 0$$

$\hat{k}$ 進行方向

$\parallel$
 $E_0 \times H_0$ の方向

右ねじの法則

自由空間中



$\hat{k}, E_0, H_0$ を図で書くと

互いに直交している

座標軸の向きに依らない

Transverse plane



$E \times H$ の方向が電波の進む方向となる

ベクトル表現のメリット

(-) 負のr方向に進む平面波 $E_1 H_1$ に対して $E_1(r) = E_1 \exp(+jk \cdot r)$

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H$$

$$\nabla \times H = j\omega\varepsilon E + J$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

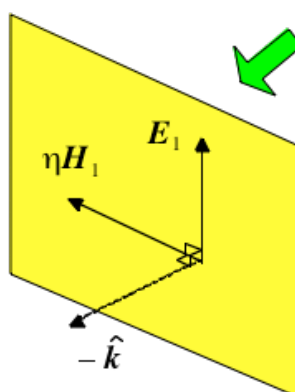
Maxwell eq.

$-\hat{k}$ 進行方向

$\parallel$
 $E_1 \times H_1$ の方向

右ねじの法則

自由空間中



$$-\hat{k} \times E_1 = \eta H_1$$

$$\hat{k} \times \eta H_1 = E_1$$

$$\hat{k} \cdot E_1 = 0$$

$$\hat{k} \cdot H_1 = 0$$

$-\hat{k}, E_1, H_1$ は

互いに直交している

座標軸の向きに依らない

Transverse plane

$E \times H$ の方向が電波の進む方向となる

波数vector $\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z = |\mathbf{k}| \hat{\mathbf{k}}$

大きさ $|\mathbf{k}| = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi f}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$ λ : 波長 波数といわれる理由

方向 単位ベクトル

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}$$

$2\pi [\text{rad}]$ に λ が
いくつあるか

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mu_0 \mathbf{H}_0$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega \mu_0}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mathbf{H}_0 = \eta \mathbf{H}_0$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 = \eta \mathbf{H}_0$$

$|\eta| = \left| \frac{E_0}{H_0} \right|$ 単位は $\left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \frac{\text{m}}{\text{A}} \right] = \left[\frac{\text{V}}{\text{A}} \right] = [\Omega]$

波動インピーダンス の定義 $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 4\pi \times 9 \times 10^9} = 120\pi [\Omega]$
 $= 377 [\Omega]$

波数vector について $\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z = |\mathbf{k}| \hat{\mathbf{k}}$

$|\mathbf{k}| = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$ λ 波長

波数の関係式: $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2$

各方向の波数を以下のようにおく

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x} \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z}$$

ただし $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ は各方向の波長

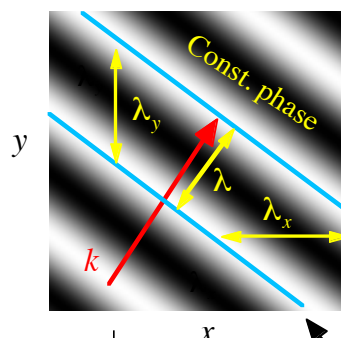
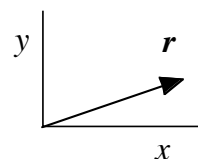
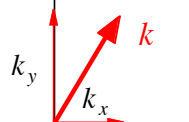
波長の関係式: $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2}$

位相速度 $\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} = c \Rightarrow v_p$ とすると

$$\left(\frac{k}{\omega} \right)^2 = \frac{k_x^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2}{\omega^2} + \frac{k_z^2}{\omega^2} \quad \text{より}$$

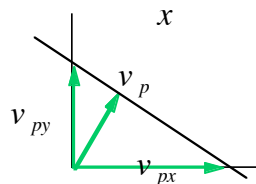
位相速度の関係式: $\frac{1}{v_p^2} = \frac{1}{v_{px}^2} + \frac{1}{v_{py}^2} + \frac{1}{v_{pz}^2}$

波の進行方向



位相項
 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$

$$k_x x + k_y y = \text{constant}$$



波の進行方向をz軸方向とすれば、

$$k = k a_z \quad \hat{k} = a_z \quad \text{となる}$$



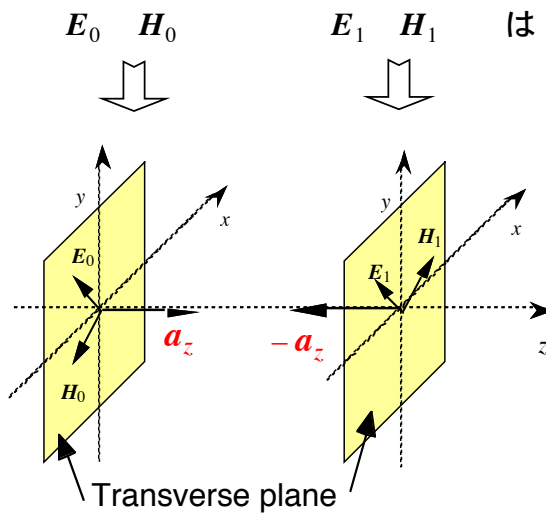
$$\eta H_0 = a_z \times E_0$$

$$\eta H_1 = -a_z \times E_1$$

$$\eta H_0 \times a_z = E_0$$

$$a_z \times \eta H_1 = E_1$$

これから、分かること： E_0, H_0, E_1, H_1 は a_z と直交している



必ずしもx軸やy軸に沿っていない

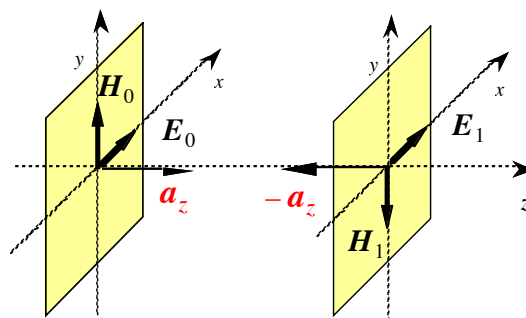
もし、z軸を回転させて
電界とx軸を一致させた場合は
次頁のようになる。

z軸を伝搬方向にとり、電界とx軸を一致させた場合

$$k = k a_z \quad \hat{k} = a_z$$

+ z 方向に進む平面波 $E_0 = E_0 a_x$ なら $\eta H_0 = a_z \times a_x E_0 = a_y E_0$ $H_0 = a_y \frac{E_0}{\eta}$

- z 方向に進む平面波 $E_1 = E_1 a_x$ なら $\eta H_1 = -a_z \times a_x E_1 = -a_y E_1$ $H_1 = -a_y \frac{E_1}{\eta}$



どちらの場合でも $E \times H$ が進行方向となっている

右ねじの法則を確認のこと

損失媒質中での波動方程式

損失媒質＝導電率をもつ誘電体・磁性体媒質

Source free を仮定する

$$J_s = 0, \rho = 0$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad \sigma \neq 0 \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

Maxwell's eq. より

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H} \\ &= -j\omega\mu (j\omega\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}) = -j\omega\mu (j\omega\epsilon + \sigma) \mathbf{E} \\ &= (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega\mu\sigma) \mathbf{E} \end{aligned}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = 0$$

$$\therefore \nabla^2 \mathbf{E} + (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega\mu\sigma) \mathbf{E} = 0$$

$$\text{同様に } \nabla^2 \mathbf{H} + (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega\mu\sigma) \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j\omega\mu\sigma$$

損失媒質中の波動方程式と解

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \gamma^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j\omega\mu\sigma$$

あるいは

$$-\gamma^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j\omega\mu\sigma$$

とおく

$$k = \beta - j\alpha \quad \text{or} \quad \gamma = \alpha + j\beta \quad \text{とおくと}$$

複素数になる

$$\begin{aligned} \text{一般解 } \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{E}_1 \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{E}_0 \exp(-\gamma \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{E}_1 \exp(+\gamma \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha r} e^{-j\beta r} + \mathbf{E}_1 e^{+\alpha r} e^{+j\beta r} \end{aligned}$$

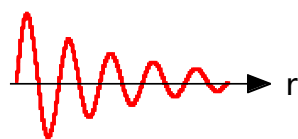
$$\text{観測値 } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right\} = \mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{-\alpha r} e^{-j\beta r} e^{j\omega t} \right\} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha r} \cos(\omega t - \beta r) \quad +r \text{ 方向へ進む波}$$

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_1 e^{+\alpha r} e^{+j\beta r} e^{j\omega t} \right\} = \mathbf{E}_1 e^{+\alpha r} \cos(\omega t + \beta r) \quad -r \text{ 方向へ進む波}$$

$E_0 e^{-\alpha r} \cos(\omega t - \beta r)$ について調べよう

+r 方向に指数関数的に減衰



α 減衰定数 [Neper/m]

β 位相定数 [rad/m]

$\gamma = \alpha + j\beta$ 伝搬定数という

波数 k と伝搬定数 γ

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j\omega\mu\sigma = -\gamma^2 = -(\alpha + j\beta)^2 \quad \text{複素数}$$



$$\alpha = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\sigma/\omega\epsilon)^2} - 1}{2}} \quad \text{実部}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\sigma/\omega\epsilon)^2} + 1}{2}} \quad \text{虚部}$$

伝搬定数の近似式

媒質によって波の減衰が変わる

波の様子

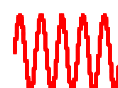
導体 $\sigma \gg \omega\epsilon$ では



損失誘電体 $\sigma \ll \omega\epsilon$ では



完全誘電体 $\sigma = 0$ では



α は減衰の割合を示す

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad \Leftarrow \gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 \approx j\omega\mu\sigma$$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \beta \approx \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r} = k_0 \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

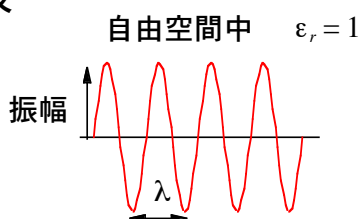
誘電体中の波

誘電体では

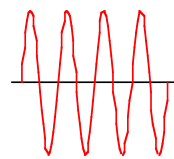
$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\sigma = 0$$

$$\alpha = 0$$



誘電体中 $\epsilon_r > 1$



$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = k_0 \sqrt{\epsilon_r}$$

自由空間の波数と比べて 誘電体中の波数は $\sqrt{\epsilon_r}$ 倍大きくなる

$$|k_0| = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad |k| = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0} = k_0 \sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi}{\lambda/\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{2\pi f}{c/\sqrt{\epsilon_r}}$$

波数の表示式により、次のことが導ける

波長 λ

$$\rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

波長が短くなる 波長短縮効果

速度 $c = f \lambda = 3 \times 10^8$ [m/s]

$$\rightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

速度は遅くなる

(例) もし, $f = 10^9$ Hz = 1 GHz

$\lambda = 0.3$ m (自由空間)

なら

$\lambda = 0.3 / \sqrt{81} = 0.033$ m (水中)

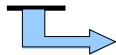
速度は $c / \sqrt{81} = c/9$

損失媒質中の波

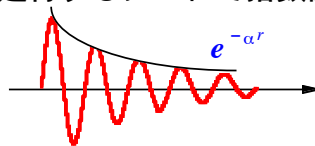
$$\sigma \neq 0$$

$$\text{減衰定数} \quad \alpha = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\sigma / \omega \epsilon)^2} - 1}{2}}$$

$$E_0 e^{-\alpha r} \cos(\omega t - \beta r)$$



進行するにつれて指数関数的に減衰



減衰定数 α [Np/m]

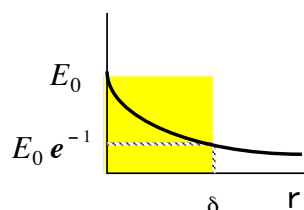
$$\text{導電性媒質中では} \quad \alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

振幅が表面 $r=0$ の値の e^{-1}

となる距離をSkin depthという

$$E_0 e^{-\alpha \delta} = E_0 e^{-1}$$

$$e^{-\alpha \delta} = e^{-1} \Rightarrow \delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$



$$E_0 \int_0^{\infty} e^{-\alpha r} dr = E_0 \frac{1}{\alpha} = E_0 \delta$$

なお、積分値と長方形の面積は等しい

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha r} dr = \frac{1}{\alpha} = \delta$$

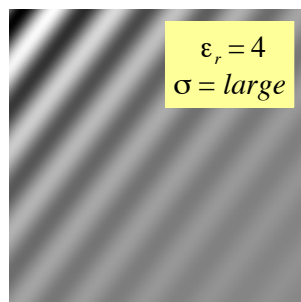
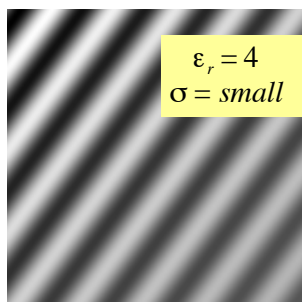
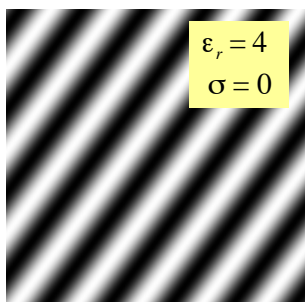
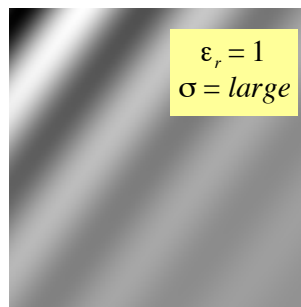
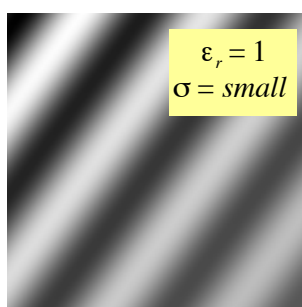
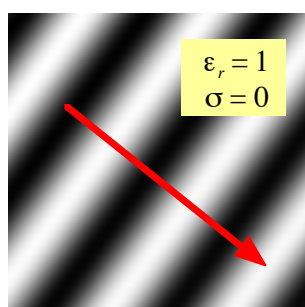
δ の厚さで考察できる

(導電性媒質に浸入する深さの目安を与える)

周波数が高くなるほど、電磁界が表面に集中する効果 = 表皮効果

例 銅では $f = 1 \text{ GHz}$ で $\delta = 2.1 \times 10^{-6} \text{ m}$

各種媒質中での波の振幅の様子



ネーパとデシベル

2つの量 A_1, A_2 を比較する際に、対数を使って表すことが多い。

$$\alpha_1 = \ln \frac{A_1}{A_2} = \log_e \frac{A_1}{A_2} \quad \text{単位はネーパ} \quad [\text{neper}]$$

自然現象は $\exp()$ 関数で表される量が多い

一方、常用対数で

$$\alpha_2 = 20 \log_{10} \frac{A_1}{A_2} \quad \text{単位はデシベル} \quad [\text{dB}]$$

ネーパとデシベルの関係は

$$\alpha_2 = 20 \log_{10} \frac{A_1}{A_2} = 20 \frac{\log_e \frac{A_1}{A_2}}{\log_e 10} \approx 8.686 \log_e \frac{A_1}{A_2} = 8.686 \ln \frac{A_1}{A_2} = 8.686 \alpha_1$$

$$1 [\text{ネーパ}] = 8.686 [\text{dB}]$$

TEM 波のPower

Poynting Vector

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

$$S(z, t) = a_z \frac{|E_0|^2}{\eta} \cos^2(\omega t - kz) - a_z \frac{|E_1|^2}{\eta} \cos^2(\omega t + kz)$$

瞬時電力を表している Phasor表現は使えない

時間と共に変動しているので、正味の電力の流れを求めるために時間平均をとる

1 周期にわたる時間平均 $\langle S(z, t) \rangle$ $z = z_0$ 面を通過する電力は

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{|E_0|^2}{\eta} \cos^2(\omega t - kz_0) dt = \frac{|E_0|^2}{\eta T} \int_0^T \frac{\cos 2(\omega t - kz_0) + 1}{2} dt = \frac{|E_0|^2}{2\eta}$$

$$\langle S(z, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(z, t) dt = a_z \frac{|E_0|^2}{2\eta} - a_z \frac{|E_1|^2}{2\eta}$$

E_0 と E_1 の電力に分かれ、伝搬方向毎に独立に電力が運ばれることが分かる

複素Poynting vector

$$P = E \times H^* \quad \text{を導入}$$

* 複素共役

Phasor 表現を使ってみる

$$E(\mathbf{r}) = E_r(\mathbf{r}) + j E_i(\mathbf{r}) \quad \text{実部と虚部に分解}$$

$$H(\mathbf{r}) = H_r(\mathbf{r}) + j H_i(\mathbf{r})$$

$$P = E \times H^* = \underline{E_r \times H_r + E_i \times H_i} + j \left(E_i \times H_r - E_r \times H_i \right)$$

時間平均Poynting vectorとの比較



$$\langle S(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(\mathbf{r}, t) dt = \frac{1}{2} \left[\underline{E_r \times H_r + E_i \times H_i} \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \{ P \} \quad \text{と等しくなっている}$$

時間平均したエネルギーの流れ

$$\langle E \times H \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(\mathbf{r}, t) dt = \frac{1}{2} \text{Re} \{ E \times H^* \}$$

時間平均 = **複素Poynting vector の実部** にて与えられる

したがって、複素Poynting vector の実部から、時間平均したエネルギーの流れが分かる。積分はしなくても良い。

$$\frac{1}{2} \text{Re} (P) = \frac{a_z}{2\eta} |E|^2 \quad \text{Transverse面内で成分に分けてみる}$$

$$E = a_x E_x + a_y E_y = a_x (E_{xr} + j E_{xi}) + a_y (E_{yr} + j E_{yi})$$

$$\begin{aligned} |E|^2 &= \left| \left(a_x E_{xr} + a_y E_{yr} \right) + j \left(a_x E_{xi} + a_y E_{yi} \right) \right|^2 \\ &= \left(a_x E_{xr} + a_y E_{yr} \right)^2 + \left(a_x E_{xi} + a_y E_{yi} \right)^2 \\ &= |E_x|^2 + |E_y|^2 \end{aligned}$$

平面波のエネルギーは、直交成分の2乗和で表される

偏波基底によらない不変量であり、また、空間的に直交する電界成分は、互いに独立にエネルギーを運ぶ

Wave Equation in Spherical coordinates

$$\nabla^2 E(r) + k^2 E(r) = 0$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

アンテナを考察するとき、自由空間を対象とするが、アンテナサイズは有限で、電波は遠方領域を扱うので、座標系として球座標をとるほうが望ましい。そこで、球座標系で

$$\nabla^2 g + k^2 g = 0$$

の解を求めてみる

球座標でのラプラシアン演算子 $\nabla^2 g = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}$

3つの変数の微分が入っているが、まず大局的に距離 r 方向に関数がどのようなかを考察しよう。

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}$$

r 方向の変化は? $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ と仮定して、波動方程式を解く

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right) + k^2 g = 0$$

$g = \frac{\phi}{r}$ と変換 (推測あり)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{\phi}{r} \right) \right) + k^2 \frac{\phi}{r} = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \left(\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r^2} \right) \right] + k^2 r \phi = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 \phi}{dr^2} + k^2 \phi = 0$$

$$\phi = C_1 e^{-jkr} + C_2 e^{+jkr}$$

$$g = C_1 \frac{e^{-jkr}}{r} + C_2 \frac{e^{+jkr}}{r}$$

+ r 方向に進行 - r 方向に進行

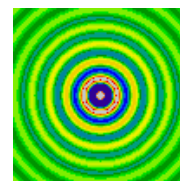
球面波

$$\frac{e^{-jkr}}{r}$$

振幅が距離に対して $\frac{1}{r}$ で減少する

静電界と決定的な違い

その他は平面波と同じ性質がある。



球面波 $\frac{e^{-jkr}}{r}$ の振幅画像