波源をもつマックスウエル方程式の解

アンテナから放射される電磁界を求めるには，波源を含むマックスウエルの方程式を解かなくてはならない．波源とは電流あるいは磁流のことであり，これらが源となって電磁界が発生する．現象的には波源から電界，磁界が発生するが，理論的に波源から放射電磁界を直接導出することは困難である．そのため，まず電流源$\boldsymbol{J}$ をもつマックスウエルの方程式をふり返ってみる．

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4}$$

この章の目的は，$\boldsymbol{J}$ による$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ の表現を導出することである．しかし，直接導出することは難しいので，ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$ を仲介して，$\boldsymbol{J}$ と$\boldsymbol{A}$ の関係を求め，次に$\boldsymbol{A}$ と$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ の関係を導く方法を紹介する．

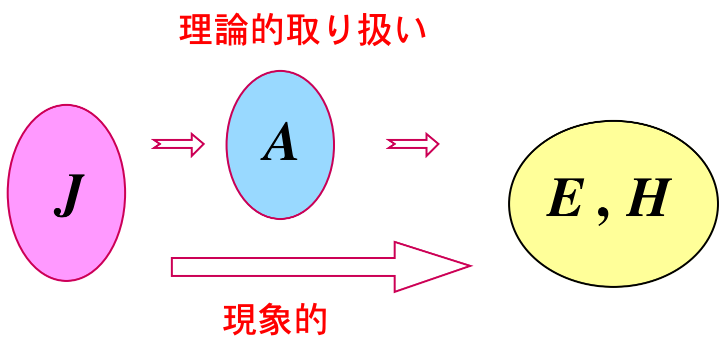


図 1　放射電磁界の導出方法

1.　支配方程式

ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$は自由空間において$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ として定義されている．まず $\boldsymbol{A}$ が満たすべき方程式を求めよう．これを(1)に代入し，変形すると次式が得られる．

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{1.1}$$

数学的に$\nabla \times \nabla \phi \equiv 0$ だから，任意のスカラー関数の勾配を(3)に加えても，(3)は成立する．そのため，電界は一般的に，

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \phi \tag{1.2}$$

と置くことができる．これを(2)に代入して，$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\varepsilon_0\,\mu_0\left(-\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\mu_0\,\boldsymbol{J}$

整理すれば次式が得られる．

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)-\mu_0\,\boldsymbol{J} \qquad (1.3)$$

ϕ は任意なので，ローレンツ条件として

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \qquad (1.4)$$

となるようにϕ を定めれば(1.3)は簡単化され，ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$ と電流密度$\boldsymbol{J}$ に関する2階の微分方程式が得られる．

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\,\boldsymbol{J} \qquad (1.5)$$

また，ϕに関しても同様にマックスウエルの方程式　$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\,\phi\right)$

を使って，電荷密度ρ とポテンシャルϕ に関する2階の微分方程式を導くことができる．

$$\nabla^2\phi-\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1.6)$$

式(1.5), (1.6)は厳密な式であり，場を支配する方程式である．

場が調和振動$e^{j\omega t}$しているすれば，時間微分の項は$j\,\omega$で置き換えられ，それぞれ

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\,\boldsymbol{A}=-\mu_0\,\boldsymbol{J} \qquad (1.7)$$

$$\nabla^2\,\phi+k^2\,\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1.8)$$

$$k^2=\omega^2\,\varepsilon_0\,\mu_0 \qquad (1.9)$$

となって，同じ形の微分方程式が得られる．この方程式を解き，その後に$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ などを使えば電界，磁界が求められることになる．

2.　非斉次微分方程式の解

式(1.7)の解はどのように表されるであろうか？ (1.7)はベクトル，(1.8)はスカラー方程式である．ベクトル成分でも成り立っているはずであるから，共通となるスカラー微分方程式の解を考えよう．

$$\nabla^2 f+k^2 f=-p \qquad (2.1)$$

ただし，f は$\boldsymbol{A}$ の成分，あるいはポテンシャルϕ ，また，右辺の p は波源を表し，$p=\mu J$ あるいは $p=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ を代表することにする．さらに，波源が無い場合には，$p=0$ であり，この場合は最も基本的な斉次2階微分方程式となる．

2.1　斉次2階微分方程式の解

アンテナの放射電磁界を考えると，球面状に波が伝搬することが予想されるので，座標系としては球座標をとることが望ましい．そこで，基本解を知るために，まず$p=0$ の波動方程式の解を導こう．

$$\nabla^2 f+k^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+k^2 f=0 \qquad (2.2)$$

簡単のために，十分遠方領域（$r\Rightarrow\infty$）でこの関数形を考え，θ や φ に無関係と仮定する．その場合，（2.2）は簡略化される．

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)+k^2 f=0 \qquad (2.3)$$

この式を解くために変数変換してみる．$f=\dfrac{\phi}{r}$ とおいて代入すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{\phi}{r}\right)\right)+k^2\frac{\phi}{r}=0\ , \qquad \frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}-\frac{\phi}{r^2}\right)\right]+k^2 r\,\phi=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^2\phi}{dr^2}+k^2\phi=0 \qquad (2.4)$$

が得られる．その解は　$\phi=C_1 e^{-jkr}+C_2 e^{+jkr}$　　C_1, C_2 は定数．

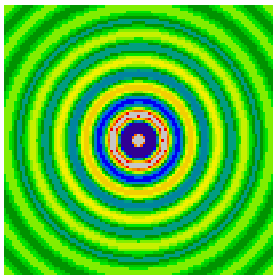
となるので，

$$f=C_1\frac{e^{-jkr}}{r}+C_2\frac{e^{+jkr}}{r} \qquad (2.5)$$

つまり，解は振幅が距離に対して$\dfrac{1}{r}$ で減少し，進行していく波であることが分かる．2階の微分方程式なので解は２つでてくるが，放射を考えているので$C_2=0$としてもよい．したがって，基本解は

$$f=\frac{e^{-jkr}}{r} \qquad (2.6)$$

で表せる球面波となる．

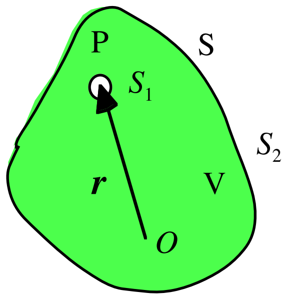


2.2　非斉次2階微分方程式の解（グリーンの定理による解法）

次に，波源がある場合の微分方程式を考える．グリーンの定理を利用した解法を使う．

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -p \qquad (2.7)$$

p は波源で位置の関数である．簡単のために波源は原点にあるものとする．ここで斉次2階微分方程式の解の補助関数 ψ を導入する．



$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad , \quad \psi = \frac{e^{-jkr}}{r} \qquad (2.8)$$

これらの式に互いにとを掛けて引き算すれば，

$$\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi = -p\,\psi$$

原点に波源をおき，$\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとする．図のように閉曲面 S で囲まれた体積 V 内で，観測点 P($\boldsymbol{r}$) を取り囲む半径aの微小な球を取り除き，体積積分する．

$$\int_v \left(\psi \nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\right) dv = \int_v p\psi\, dv \qquad (2.9)$$

グリーンの定理より，左辺は体積を取り囲む表面積分に置き換えられる．

$$\int_v \left(\psi \nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\right) dv = \int_v \nabla\cdot\left(\psi \nabla\phi - \phi\nabla\psi\right) dv$$

$$= \oint_S \left(\psi \nabla\phi - \phi\nabla\psi\right)\cdot \boldsymbol{n}dS = \oint_S \left(\psi \frac{\partial\phi}{\partial n}\phi - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS \qquad (2.10)$$

$\boldsymbol{n}$ は面の外向き法線ベクトルである．閉曲面全体は２つの面積とに分解できるので，それぞれの面で積分を考えてみる．

$$\oint_{S_1+S_2} \left(\psi \nabla\phi - \phi\nabla\psi\right)\cdot \boldsymbol{n}dS = \oint_{S_1} \left(\psi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS + \oint_{S_2} \left(\psi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) \qquad (2.11)$$

ただし，S_1 は観測点 P を取り囲む半径の微小球面，S_2 は十分遠方の大きな半径をもつ閉曲面である．観測点 P($\boldsymbol{r}$) の位置では半径 a の微小閉曲面を見たとき，面の外向き法線方向は- r 方向となるので，

$$\oint_{S_1} \left(\psi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS_1 = \oint_{S_1} \left[\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{\partial\phi}{-\partial r} - \phi\frac{\partial}{-\partial r}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\right] dS_1$$

$$= \oint_{S_1} \left[-\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \phi\left(\frac{e^{-jkr}}{r^2} + jk\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\right] dS_1 \qquad (2.12)$$

$a \to 0$ の極限をとると，ϕ や $\dfrac{\partial\phi}{\partial r}$ は観測点の位置における代表値で表される．それらの値を $\overline{\phi(\boldsymbol{r})}$ ，$\overline{\dfrac{\partial\,\phi(\boldsymbol{r})}{\partial r}}$ とすると，この積分は $dS_1 = 4\pi\,a^2$ を用いて

$$\lim_{a\to 0}\left(-\frac{e^{-jka}}{a}\,\overline{\frac{\partial\,\phi(\boldsymbol{r})}{\partial r}} - \frac{e^{-jka}}{a^2}\,\overline{\phi(\boldsymbol{r})} - jk\,\frac{e^{-jka}}{a}\,\overline{\phi(\boldsymbol{r})}\right)4\pi\,a^2 = -4\pi\,\overline{\phi(\boldsymbol{r})} \tag{2.13}$$

とおくことができる．したがって，

$$\oint_{S_1+S_2}\left(\psi\,\nabla\phi - \phi\nabla\psi\right)\cdot\boldsymbol{n}dS = -4\pi\,\overline{\phi(\boldsymbol{r})} + \oint_{S_2}\left(\psi\,\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS = -\int_v p\psi\,dv$$

つまり，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_v p\psi\,dv + \frac{1}{4\pi}\oint_{S_2}\left[\frac{e^{-jkr}}{r}\,\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\right]dS \tag{2.14}$$

にて表される．一見複雑に見えるが，第１項の体積積分は波源そのものによるポテンシャルで，波源は原点にある．第２項の面積積分の項は面積の境界面に現れる等価２次波源によるポテンシャルを表す．対象としている領域内に波原が無ければ，第１項は０で，第２項の境界面上の等価波源による項のみとなる．この場合，波源は対象とする領域の外側にあって，それがポテンシャルを与えていることになる．これはホイゲンスの原理で，開口面アンテナからの放射を扱うときの基本式となる．

また，考える領域が無限大の半径を持つとき，すなわち，境界面が無限大の時，第２項の面積積分が０になることを説明しよう．$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ の非常に大きい境界面は半径 $\boldsymbol{r}$ の球面と考えることができる．すなわち

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

S_2の積分項は　$I = \dfrac{e^{-jkr}}{r}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial r} - \phi\,\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{e^{-jkr}}{r} = \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial r} + j\,k\,\phi\right)\dfrac{e^{-jkr}}{r} + \phi\,\dfrac{e^{-jkr}}{r^2}$

となる．遠方における ϕ は $\dfrac{1}{r}$ の形をしていなければならない．

一方，球の面積は $4\pi\,r^2$ だから第３項は　$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\phi\,\frac{e^{-jkr}}{r^2}\,4\pi\,r^2 = 0$

また，第１項，２項の面積積分は

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} + j\,k\,\phi\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\,4\pi\,r^2 = 4\pi\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} + j\,k\,\phi\right)e^{-jkr}$$

ここで，

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} + j\,k\,\phi\right) = 0 \tag{2.15}$$

となれば面積積分は０となる．これが，放射条件と呼ばれるもので，広い意味での境界条件である．この物理的な意味は遠方では，ポテンシャルが必ず外向きに伝搬していかなければならないことである．すなわち，十分遠方では，ポテンシャルの形として

$$\phi \Rightarrow \frac{e^{-jkr}}{r}$$

でなければならないことを示している．基本解もこれを満たしており，0となる．

波源が対象とする領域内で有限の分布をもっていたとすると，$\boldsymbol{r}'$ を波源の座標として観測点$\boldsymbol{r}$ までの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$
とおきかえればよい．

その結果，無限に広い領域内に波源 p がある場合の解は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_v p(\boldsymbol{r}')\,\frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv' \qquad (2.16)$$

となる．

体積を十分大きくとっても波源の位置は有限であり，それ故，体積積分は波源の占める体積のみとなる．遠くの観測点では分母は r と近似できるので

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_v p(\boldsymbol{r}')\,\frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{r}\,dv' \qquad (2.17)$$

と書くことができる．ただし，位相項は距離による変化が大きいのでその近似は使えない．

以上により，非斉次微分方程式(2.7)の解が(2.17)のように求められた．’は波源の座標系である．ベクトル形式(1.7)の解は次の形になる．

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{r}\,e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dv' \qquad (2.18)$$

参考のために，波源がある場合，時間変動のあるDynamic field の場合と無いStatic fieldの場合の比較を，次の図に示した．波動方程式の形式は全く同じであるため，解の形式も同じになる．Dynamic fieldで k ---> 0 とすることにより，Static fieldの場合になることがわかる．

時間変動のある場合と無い場合の方程式とその解の比較

Dynamic $\Leftrightarrow$ $k \neq 0$

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{vol} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\, e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{r}\, dv'$$

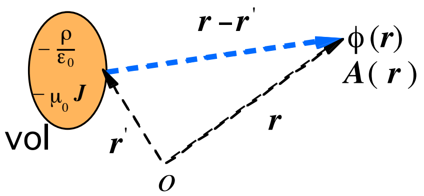
Static $\Leftrightarrow$ $k \Rightarrow 0$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \longleftarrow \text{源}$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{vol} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{r}\, dv'$$

（電磁気学１の復習）

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$$



ただし　$|\boldsymbol{r}'| \ll |\boldsymbol{r}|$

Dynamic $\Leftrightarrow$ $k \neq 0$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} + k^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{vol} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\, e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{r}\, dv'$$

Static $\Leftrightarrow$ $k \Rightarrow 0$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \longleftarrow \text{源}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{vol} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{r}\, dv'$$

（電磁気学２の復習）

方程式の右辺は源である。

解の形を比較検討のこと

図２　支配方程式とその解の比較

3. ベクトルポテンシャルによる電磁界表現

電流によるベクトルポテンシャルが求まったとすると，電磁界はローレンツ条件より，

$$\boldsymbol{E} = -j\omega\boldsymbol{A} - \nabla\phi = -j\omega\boldsymbol{A} - j\frac{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\omega\varepsilon_0\mu_0} = -j\omega\left(\boldsymbol{A} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right) \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.2}$$

で与えられる．

スリットから放射するアンテナや開口面アンテナなどを取り扱うときは，電流だけではなく磁流（実際には存在しえないが）を考慮しておくと扱いやすい．そこで，マックスウエルの式の対称性を考慮して，形式的ではあるが，磁流が与えられたときの表現式も掲げておく．

場が調和振動しているとき，磁流が波源となるマックスウエルの方程式は次のように書ける．

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}_m \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{3.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0 \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = \rho_m \tag{3.4}$$

ここで$\boldsymbol{J}_m$は磁流，ρ_mは磁荷密度である．磁流も磁荷密度も想像上のものである．

(3.4)式から　　$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = -\nabla \times \boldsymbol{A}_m$　　$\boldsymbol{A}_m$：磁気ベクトルポテンシャル

とおくと，　　$\boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{A}_m$　　より　$\nabla \times \boldsymbol{H} = -j\omega \nabla \times \boldsymbol{A}_m$

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{H} + j\omega \boldsymbol{A}_m \right) = 0 \tag{3.5}$$

したがって磁界は次のように書くことができる．

$$\boldsymbol{H} = -j\omega \boldsymbol{A}_m - \nabla \phi_m \qquad \phi_m\text{：磁気ポテンシャル} \tag{3.6}$$

これをマックスウエルの方程式に代入して整理すれば，2階の微分方程式が導かれる．

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}_m + k^2 \boldsymbol{A}_m = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A}_m + j\omega\varepsilon\mu\phi_m\right) - \varepsilon \boldsymbol{J}_m \tag{3.7}$$

磁気型のローレンツ条件として $\nabla \cdot \boldsymbol{A}_m + j\omega\varepsilon\mu\phi_m = 0$ を課せば，磁気ベクトルポテンシャルと磁気ポテンシャルに関して，次の支配方程式が得られる．

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}_m + k^2 \boldsymbol{A}_m = -\varepsilon \boldsymbol{J}_m \tag{3.8}$$

$$\nabla^2 \phi_m + k^2 \phi_m = -\frac{\rho_m}{\mu} \tag{3.9}$$

それゆえ，電磁界は次のように求められる．

$$\boldsymbol{H} = -j\omega \boldsymbol{A}_m - \nabla\phi_m = -j\omega\left(\boldsymbol{A}_m + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m\right) \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{A}_m \tag{3.11}$$

以上より，電流源，磁流源による電磁界として以下の表現式が得られる．

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{A}_m - j\omega\left(\boldsymbol{A} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right) \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A} - j\omega\left(\boldsymbol{A}_m + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m\right) \tag{3.13}$$

ただし，ベクトルポテンシャルは電流密度，磁流密度によって次のように与えられる．

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{r} e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv', \quad \boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\int_v \frac{\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r}')}{r} e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv' \tag{3.14}$$

4.　微小電流素子から発生する電磁界成分の導出について

ベクトルポテンシャルを用いて電磁界成分を求める手順を示す．自分で導出のこと．

ベクトルポテンシャル
$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{vol} \frac{\boldsymbol{J}\,(\boldsymbol{r}')\, e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{r}\, dv'$$

$$\boldsymbol{A} = A_r\,\boldsymbol{a}_r + A_\theta\,\boldsymbol{a}_\theta + A_\varphi\,\boldsymbol{a}_\varphi$$

電界　$\boldsymbol{E} = -j\,\omega\left(\boldsymbol{A} + \dfrac{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{k^2}\right)$　　　　磁界　$\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}$

原点に z 軸方向に向いた微少電流素子$I\ell$がある場合　$\boldsymbol{A}$　$\Rightarrow$　$A_z = \dfrac{\mu_0\, I\ell}{4\pi r}\, e^{-jkr}$

とおくことができる．球座標で電磁界成分を求めるため，ベクトルポテンシャル成分も球座標表現する必要がある．球座標への変換は以下となる．

$$A_r = A_z\cos\theta = \frac{\mu_0\, I\ell}{4\pi\, r}\, e^{-jkr}\cos\theta$$
$$A_\theta = -\,A_z\sin\theta = -\,\frac{\mu_0\, I\ell}{4\pi\, r}\, e^{-jkr}\sin\theta \qquad (4.1)$$
$$A_\varphi = 0$$

これから，次のベクトル演算を行う．

公式
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\,(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \qquad (4.2)$$

を使って，まず $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を求めてみる．

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) = \frac{\mu_0\, I\ell}{4\pi r^2}\cos\theta\left(e^{-jkr} - jkr\, e^{-jkr}\right) = \frac{\mu_0\, I\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-jkr}}{r^2} - \frac{jk\, e^{-jkr}}{r}\right)\cos\theta$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\,(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} = -\,\frac{\mu_0\, I\ell}{4\pi}\,\frac{2e^{-jkr}}{r^2}\cos\theta$$

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} = 0$$

これより

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = -\,\frac{\mu_0\, I\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-jkr}}{r^2} + jk\,\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\cos\theta \qquad (4.3)$$

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_r\,\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\theta\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{\partial\theta} + \boldsymbol{a}_\varphi\,\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{\partial\varphi} \qquad (4.4)$$

4.1 電界成分について

$\boldsymbol{E} = -j\,\omega\left(\boldsymbol{A} + \dfrac{\nabla\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{k^2}\right)$ であるから，成分毎に書き出すと

$$E_r = -j\,\omega\left(A_r + \frac{1}{k^2}\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{\partial r}\right)$$

$$= -\,j\omega\left\{\frac{\mu_0\,I\ell}{4\pi\,r}\,e^{-\,j\,kr}\cos\,\theta - \frac{\mu_0\,I\ell}{4\pi}\,\frac{\cos\,\theta}{k^2}\left(\frac{-\,2}{r^2}\,e^{-\,j\,kr} - \frac{jk}{r^2}\,e^{-\,j\,kr} - jk\,\frac{e^{-\,j\,kr}}{r^2} + k^2\,\frac{e^{-\,j\,kr}}{r}\right)\right\}$$

$$= j\omega\,\frac{\mu_0\,I\ell}{4\pi}\,e^{-\,j\,kr}\cos\,\theta\left(\frac{2}{r^2} + \frac{j\,2k}{r^2}\right) = \omega\,k\,\frac{\mu_0\,I\ell}{2\pi\,r}\,e^{-\,j\,kr}\cos\,\theta\left(\frac{1}{j\,k\,r^2} + \frac{1}{r}\right)$$

なお，$\eta = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \mu_0\dfrac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \mu_0\dfrac{\omega}{k}$　なので　$\omega\,\mu_0 = \eta\,k = \dfrac{\eta\,2\pi}{\lambda}$

係数は次のように置き換えることができる．　$\omega\,\dfrac{\mu_0\,I\ell}{4\pi\,r} = \eta\,\dfrac{2\pi}{\lambda}\,\dfrac{I\ell}{4\pi\,r} = \dfrac{\eta\,I\ell}{2\,\lambda\,r}$　(4.5)

それゆえ　E_r成分は次のようになる．

$$E_r = \frac{\eta\,I\ell}{2\pi\,r}\,e^{-\,j\,kr}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{j\,kr^2}\right)\cos\,\theta \tag{4.6}$$

同様に　$E_\theta = -j\,\omega\left(A_\theta + \dfrac{1}{k^2}\dfrac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{r\,\partial\theta}\right)$

$$= -\,j\,\omega\left\{-\frac{\mu_0\,I\ell}{4\pi\,r}\,e^{-\,j\,kr}\sin\,\theta + \frac{1}{k^2}\frac{\mu_0\,I\ell}{4\pi\,r}\,e^{-\,jk\,r}\sin\,\theta\left(\frac{e^{-\,j\,kr}}{r^2} + jk\,\frac{e^{-\,j\,kr}}{r}\right)\right\}$$

$$= j\,\omega\,\frac{\mu_0\,I\ell}{4\pi\,r}\,e^{-\,j\,kr}\sin\,\theta\left(1 - \frac{1}{k^2r^2} - j\,\frac{1}{kr}\right) = j\,\frac{\eta\,I\ell}{2\,\lambda\,r}\,e^{-\,j\,kr}\left(1 + \frac{1}{j\,kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right)\sin\,\theta \tag{4.7}$$

$$E_\varphi = -j\,\omega\left(A_\varphi + \frac{1}{k^2}\,\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{\partial\varphi}\right) = 0 \tag{4.8}$$

したがって，電界成分に関しては次のようになる．

$$E_r = \frac{\eta\,I\ell}{2\pi\,r}\,e^{-\,j\,kr}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{j\,kr^2}\right)\cos\,\theta\,,\quad E_\theta = j\,\frac{\eta\,I\ell}{2\,\lambda\,r}\,e^{-\,j\,kr}\left(1 + \frac{1}{j\,kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right)\sin\,\theta\,,\quad E_\varphi = 0 \tag{4.9}$$

2．磁界成分について

次のベクトル回転公式を使う.

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_r & r\,\boldsymbol{a}_\theta & r\sin\theta\,\boldsymbol{a}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r\,A_\theta & r\sin\theta\,A_\varphi \end{vmatrix} \tag{4.10}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,A_\varphi \right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \boldsymbol{a}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\,A_\varphi \right) \right] + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,A_\theta \right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

各項目に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,A_\varphi \right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} = 0 \qquad \therefore\ \left(\nabla \times \boldsymbol{A} \right)_r = 0$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\,A_\varphi \right) = 0 \qquad \therefore\ \left(\nabla \times \boldsymbol{A} \right)_\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,A_\theta \right) = \frac{-\mu_0 I\ell}{4\pi} \sin\theta \frac{\partial e^{-jkr}}{\partial r} = jk \frac{\mu_0 I\ell}{4\pi} \sin\theta\, e^{-jkr}$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{-\mu_0 I\ell}{4\pi r} e^{-jkr} \sin\theta$$

したがって，φ成分しか存在しないことがわかる.

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \boldsymbol{a}_\varphi = \boldsymbol{a}_\varphi\, jk \frac{\mu_0 I\ell}{4\pi r}\left(1 + \frac{1}{jkr} \right) e^{-jkr} \sin\theta = \boldsymbol{a}_\varphi\, j \frac{\mu_0 I\ell}{2\lambda r}\left(1 + \frac{1}{jkr} \right) e^{-jkr} \sin\theta \tag{4.11}$$

これから磁界成分に関しては以下が導かれる.

$$H_r = \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \boldsymbol{A} \right)_r = 0$$

$$H_\varphi = \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \boldsymbol{A} \right)_\varphi = j \frac{I\ell}{2\lambda r}\left(1 + \frac{1}{jkr} \right) e^{-jkr} \sin\theta$$

$$H_\theta = \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \boldsymbol{A} \right)_\theta = 0 \tag{4.12}$$

以上をまとめると，z 軸方向に向いた微少電流素子$I\ell$が原点にある場合，発生する電磁界成分は次のようになる．

$$A_z = \frac{\mu_0 I\ell}{4\pi r} e^{-jkr} \qquad \text{（ベクトルポテンシャル）}$$

$$E_r = \frac{\eta I\ell}{2\pi r} e^{-jkr}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2}\right)\cos\theta \qquad H_r = 0$$

$$E_\theta = j\frac{\eta I\ell}{2\lambda r} e^{-jkr}\left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2r^2}\right)\sin\theta \qquad H_\theta = 0 \tag{4.13}$$

$$E_\varphi = 0 \qquad H_\varphi = j\frac{I\ell}{2\lambda r}\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)e^{-jkr}\sin\theta$$

電流素子から十分遠い位置では $kr = \dfrac{2\pi r}{\lambda} >> 1$

$\dfrac{1}{kr}$ や $\dfrac{1}{k^2r^2}$ は 1 より十分小さくなるので無視できる．その場合，電磁界成分は

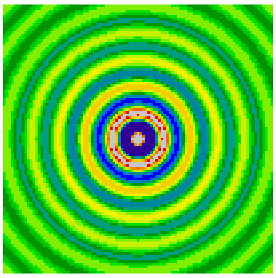
$$E_\theta = j\frac{\eta I\ell}{2\lambda r} e^{-jkr}\sin\theta, \qquad H_\varphi = j\frac{I\ell}{2\lambda r} e^{-jkr}\sin\theta \tag{4.14}$$

しか残らなくなる．これは放射電磁界と呼ばれており，$E_\theta = \eta H_\varphi$の関係がある．

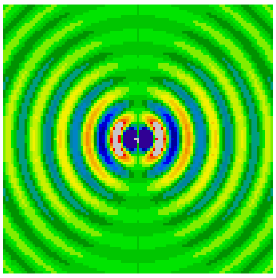
自由空間では $$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^{9}} = 120\pi \tag{4.15}$$

なので, $$E_\theta = j\frac{\eta I\ell}{2\lambda r} e^{-jkr}\sin\theta = j\,60\pi\,\frac{I\ell}{\lambda}\,\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta \tag{4.16}$$

となる．この表現式から放射電磁界は球面波$\dfrac{e^{-jkr}}{r}$ とその指向性 $\sin\theta$ からなっていることがわかる．



$\mathrm{Re}\left\{\dfrac{e^{-jkr}}{r}\right\}$



$\mathrm{Re}\left\{\dfrac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta\right\}$