

# 偏波の基礎

## 2. 偏波の表現方法

偏波とは、図2.1に示すように空間のある定まった位置で、単一周波数の電波を進行方向の後ろ側から眺めたとき、時間と共に電界ベクトルの先端が描く軌跡のことである。電界ベクトルの先端の軌跡は、一般的にだ円形となることが知られている。だ円の中には扁平なだ円、円に近いだ円、傾いただ円など様々なものが含まれる。扁平の極限として直線や円がある。また、軌跡の回転方向もある。これら種々のだ円を表わすのに、ellipticity angle, tilt angle, size, 相対位相, 偏波比, ストークスパラメータ, ポアンカレ球 (Poincare Sphere)などが用いられている。この節では、だ円偏波を表現する際に使われるいくつかの記号と、その定義およびそれらの関係を紹介する。

重複になるが、偏波は電界ベクトルそのものではなく、ベクトル先端の軌跡である。だ円形の電界ベクトル?というような間違いをしないように注意が必要である。

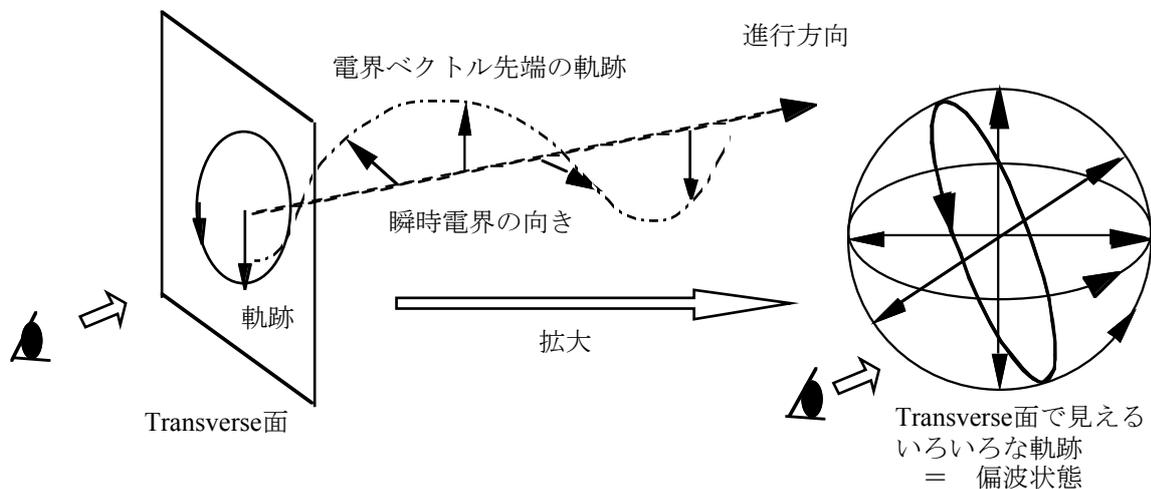


図2.1 電界の先端の軌跡

### 2.1 一般的数式表現

平面波の電界は、横断面 (Transverse面) 内で2つの直交成分に分解できる。この波が+z方向に伝搬すると仮定して、x-yの直交成分に分解してみよう。z方向に伝搬する場合、電界のz方向成分は存在しない。瞬時電界ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}(z, t)$ は実数であり、次のように書くことができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}(z, t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(z, t) \\ \varepsilon_y(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_x| \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ |E_y| \cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

ここで、 $|E_x|$ 、 $|E_y|$ は振幅、 $\phi_x$ 、 $\phi_y$ は絶対位相を表わす。偏波の定義に従って $z = 0$ の定位置で観測したとすると、式(2.1)は $\boldsymbol{\varepsilon}(0, t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ として

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(t) \\ \varepsilon_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_x| \cos(\omega t + \phi_x) \\ |E_y| \cos(\omega t + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

となる。各成分は

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(t) &= |E_x| \cos(\omega t + \phi_x) = |E_x| \cos \omega t \cos \phi_x - |E_x| \sin \omega t \sin \phi_x \\ \varepsilon_y(t) &= |E_y| \cos(\omega t + \phi_y) = |E_y| \cos \omega t \cos \phi_y - |E_y| \sin \omega t \sin \phi_y\end{aligned}\tag{2.3}$$

である。相対位相差を  $\delta = \phi_y - \phi_x$  (2.4)

とにおいて、式(2.3)を変形すると

$$\begin{aligned}|E_y| \varepsilon_x(t) \cos \phi_y - |E_x| \varepsilon_y(t) \cos \phi_x &= |E_x| |E_y| \sin \delta \sin \omega t \\ |E_y| \varepsilon_x(t) \sin \phi_y - |E_x| \varepsilon_y(t) \sin \phi_x &= |E_x| |E_y| \sin \delta \cos \omega t\end{aligned}\tag{2.5}$$

が得られる。これから  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$  を使って時間因子  $\omega t$  の項を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\varepsilon_x^2(t)}{|E_x|^2} - \frac{2 \varepsilon_x(t) \varepsilon_y(t)}{|E_x| |E_y|} \cos \delta + \frac{\varepsilon_y^2(t)}{|E_y|^2} = \sin^2 \delta\tag{2.6}$$

この式は傾きをもつだ円の方程式である。  $\delta$  が特別の値のときは分かり易い式に帰着する。例えば、

$a = |E_x|, b = |E_y|, x = \varepsilon_x(t), y = \varepsilon_y(t)$  とおくと、次の方程式になる。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \delta$$

$\delta = \pm \frac{\pi}{2}$  のとき  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  : 傾きのないだ円の方程式

さらに  $a = b$  なら  $x^2 + y^2 = a^2$  : 円の方程式

$\delta = 0, \pi$  のとき  $\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\right)^2 = 0, y = \pm \frac{b}{a}x$  : 直線の方程式

それゆえ、瞬時電界ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  は、図2.2に示すようなだ円の軌跡を描くことがわかる。電界ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  の回転方向は位相の時間変化によって分かる。図2.2のようにx軸と  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  のなす角を  $\psi$  とすると

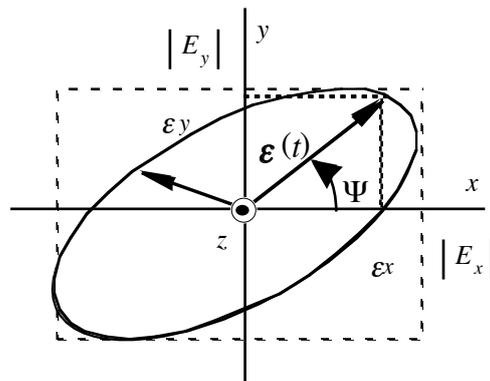


図2.2 電界ベクトル先端の軌跡

$$\tan \psi = \frac{\varepsilon_y(t)}{\varepsilon_x(t)} \tag{2.7}$$

その時間変化は微分操作より、

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{-\omega |E_x| |E_y| \sin \delta}{|E_x|^2 \cos^2(\omega t + \phi_x) + |E_y|^2 \cos^2(\omega t + \phi_y)} = -\frac{\omega |E_x| |E_y| \sin \delta}{|\mathbf{\varepsilon}(t)|^2} \tag{2.8}$$

これより、図2.2を参照して

$$0 < \delta < \pi \quad \text{に対して} \quad \frac{d\psi}{dt} < 0 \quad (\text{時計回り}) \tag{2.9a}$$

$$-\pi < \delta < 0 \quad \text{に対して} \quad \frac{d\psi}{dt} > 0 \quad (\text{反時計回り}) \tag{2.9b}$$

となる。図2.3に時間と共に変化する位相角の方向を示す。図2.3(a)と図2.2の直角座標系x-y平面では、z軸は紙面から読者側に向き、電波は正のz方向に進むと仮定しているの、電波の到来方向から見ていることになる。また、図2.3(b)は後ろ側から見た図である。

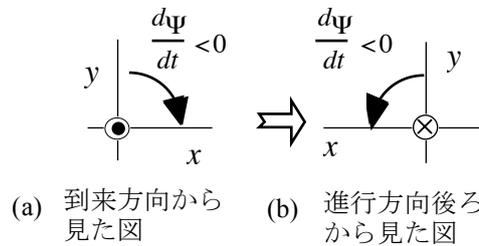


図2.3 回転の方向（左回り偏波）

回転方向の定義は、伝搬方向の後ろ側から電界ベクトルの先端を見たときに、時間の経過と共にどちらの方向に回るかで決めている。IEEE Standard [7]によれば、z=一定の面内で、時間と共に時計回りに回転するものを「右回り」と定義し、反時計回りに回転するものを「左回り」と定義している。図2.3(a)のように到来方向から見た場合は、 $\frac{d\psi}{dt} < 0$  は時計回りで、一見すると右回りに思えるが、電波を見る方向が逆なので、図2.3(b)のように左回りである。また、 $\frac{d\psi}{dt} > 0$  の場合が右回りである。

以上のことから、電界の回転方向は相対位相  $\delta = \phi_y - \phi_x$  の符号によって区別できる。

$0 < \delta < \pi$  ならば 左回り (Left handed rotation sense)

$-\pi < \delta < 0$  ならば 右回り (Right handed rotation sense)

図2.4に $\delta$ と共に一般的な円偏波を示した。偏波状態を表す電界の具体的表現は次のようになる。簡単のために、 $\phi_x = 0$ とおき、 $\delta = \phi_y - \phi_x = \phi_y$ としている。

$$\text{一般形} \quad \begin{cases} \varepsilon_x(z, t) = |E_x| \cos(\omega t - kz) \\ \varepsilon_y(z, t) = |E_y| \cos(\omega t - kz + \delta) \end{cases}$$

$$|E_x| \neq 0, |E_y| = 0 \quad \text{ならば} \quad \text{水平偏波} \quad \begin{cases} \varepsilon_x(z, t) = |E_x| \cos(\omega t - kz) \\ \varepsilon_y(z, t) = 0 \end{cases}$$

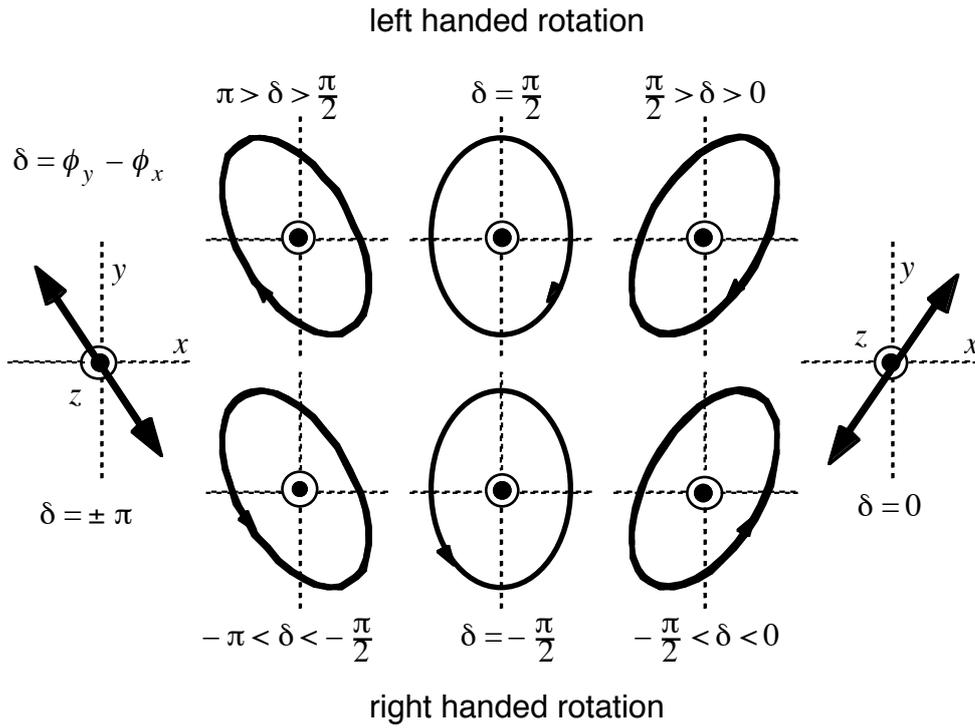


図2.4 一般的なだ円偏波

$|E_x| = 0, |E_y| \neq 0$  ならば 垂直偏波  $\begin{cases} \varepsilon_x(z, t) = 0 \\ \varepsilon_y(z, t) = |E_y| \cos(\omega t - kz + \delta) \end{cases}$

$|E_x| \neq 0, |E_y| \neq 0$  の場合,

$\delta = 0$  ならば  $\varepsilon_x(z, t)$  と  $\varepsilon_y(z, t)$  が同相なので, 正に傾いた直線偏波

$\delta = \pi$  ならば  $\varepsilon_x(z, t)$  と  $\varepsilon_y(z, t)$  が逆相なので, 負に傾いた直線偏波

$0 < \delta < \pi$  は 左回りだ円偏波

さらに, もし  $\delta = \frac{\pi}{2}, |E_x| = |E_y|$  ならば,

左回り円偏波  $\begin{cases} \varepsilon_x(z, t) = |E_x| \cos(\omega t - kz) \\ \varepsilon_y(z, t) = -|E_x| \sin(\omega t - kz) \\ \psi = -\omega t \end{cases}$

$-\pi < \delta < 0$  は 右回りだ円偏波

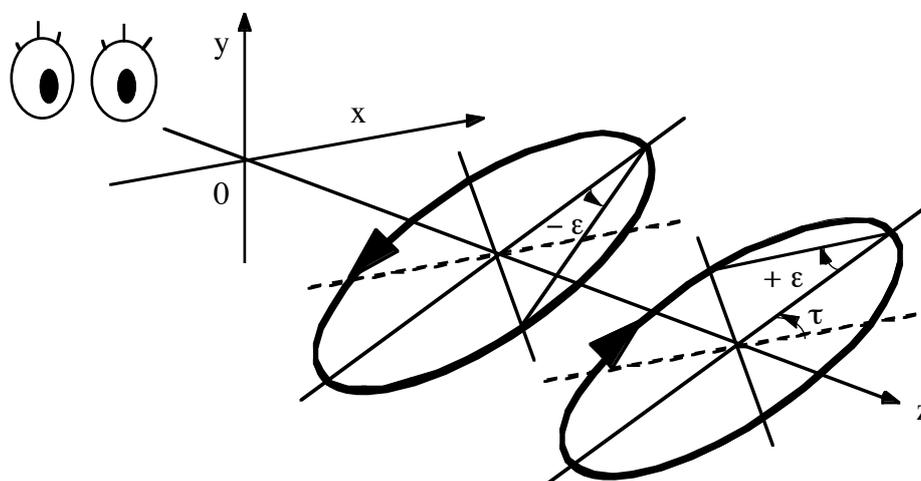
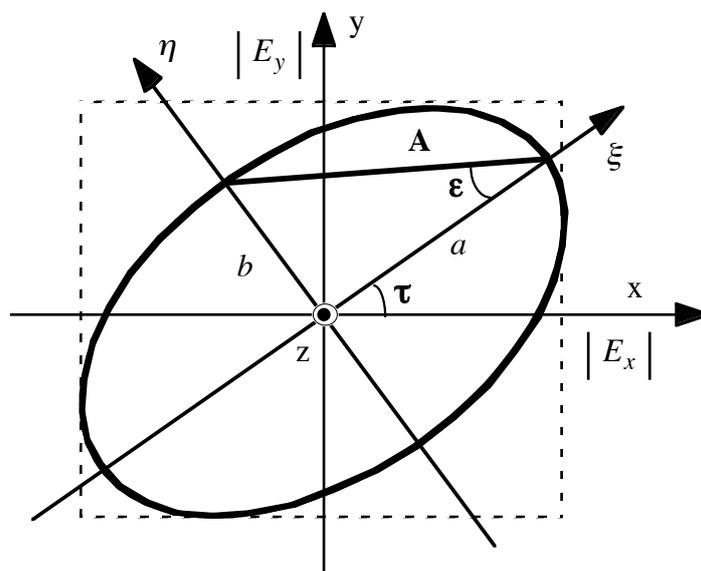
さらに, もし  $\delta = -\frac{\pi}{2}, |E_x| = |E_y|$  ならば,

右回り円偏波  $\begin{cases} \varepsilon_x(z, t) = |E_x| \cos(\omega t - kz) \\ \varepsilon_y(z, t) = |E_x| \sin(\omega t - kz) \\ \psi = \omega t \end{cases}$

したがって, 直線偏波も円偏波も, だ円偏波の中の特別な偏波状態であることが分かる。

## 2.2 幾何学的パラメータによる表現

だ円を表現するには、幾何学的パラメータ ( $\tau, \varepsilon, A$ ) を使うほうが直観的に分かりやすい。幾何学的パラメータは、ellipticity angle  $\varepsilon$ 、傾き角 (tilt angle)  $\tau$ 、size  $A$  である。偏波はだ円を図2.5の目玉のように後ろ側から見るようになっており、 $\varepsilon$  と  $\tau$  は図2.5、図2.6に示す角度である。

図2.5 座標系と幾何学的パラメータ ( $\tau, \varepsilon, A$ )図2.6 だ円偏波を表すパラメータ ( $\tau, \varepsilon, A$ )

$$\text{Ellipticity angle } \varepsilon \quad \varepsilon = \tan^{-1} \frac{b}{a}, \quad \tan \varepsilon = \frac{b}{a} \quad \left( -\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.10)$$

$a$  はだ円の長軸、 $b$  はだ円の短軸の長さである。Ellipticity はだ円の膨らみ具合を表しており、 $\tan \varepsilon$  はアンテナ工学で使う「軸比」の逆数である。 $a = b$  では  $\varepsilon = \pm \frac{\pi}{4}$  となって完全な円を表し、 $b = 0$  では  $\varepsilon = 0$  となるの

で直線となる。符号は回転の向きに対応しており、左回りだ円偏波に対しては  $\varepsilon > 0$  , 右回りだ円偏波に対しては  $\varepsilon < 0$  となる。後述の式(2.19)を参照。

なお, ellipticity angle の記号  $\varepsilon$  は頭文字に対応して採用した[4], [5], [9]. 誘電率と同じ記号なので混同しやすい面もあるが, 以後は特に断らない限り,  $\varepsilon$  を ellipticity angle として表すものとする。

Tilt angle (傾き角)  $\tau$  は, だ円の長軸と x 軸のなす角度であり, だ円の傾きを表す。その範囲は  $(-\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2})$  である。なお, Tilt angle の頭文字に対応して,  $\tau$  の記号を採用しているが, 書物や文献によっては別の記号を使用したり, Orientation Angle と呼ぶことも多い。

$$\text{だ円の大きさは} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.11)$$

によって与えられる。 $A^2$  は電力の大きさを表し, 偏波情報とは直接関係しない。

だ円偏波は, 幾何学的パラメータ (Tilt angle, Ellipticity angle) によって図2.7のように一覧表で表現することができる。 $\varepsilon = \pm \frac{\pi}{4}$  では,  $\tau$  がどのような値になっても円偏波である。

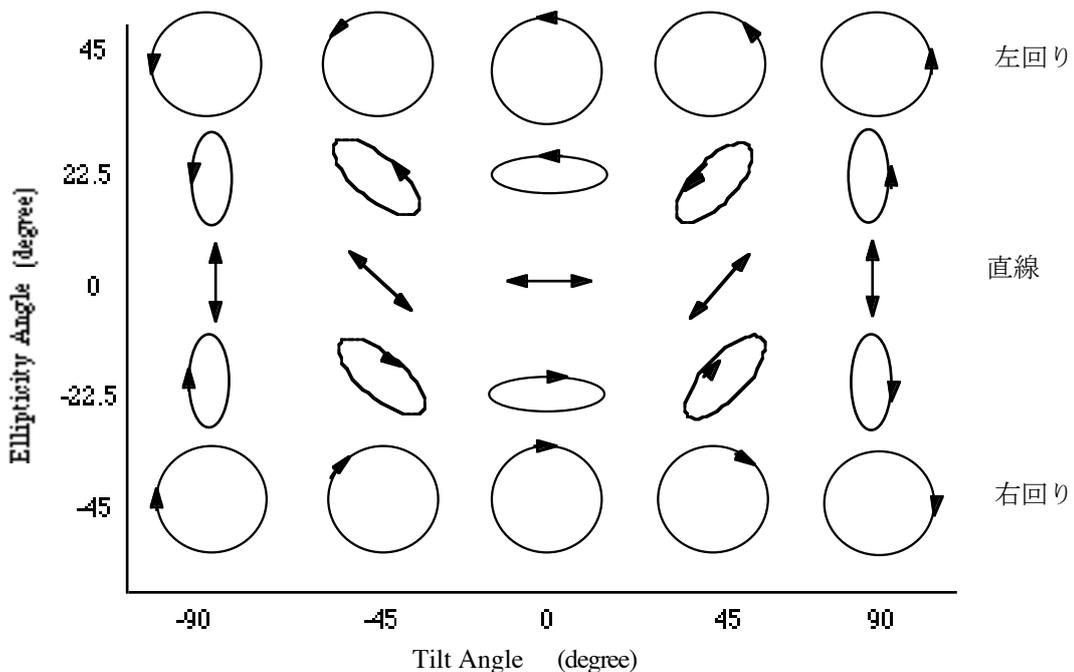


図2.7 幾何学的パラメータによるだ円偏波の表現

次に, 数式的なパラメータ ( $|E_x|, |E_y|, \phi_x, \phi_y$ ) と幾何学的パラメータ ( $A, \varepsilon, \tau$ ) の関係を求めてみよう。

図2.8において,  $\xi$  軸と  $\eta$  軸をそれぞれ長軸と短軸方向に選ぶ。この新しい座標系で, だ円偏波は傾きのない正規のだ円となる。この座標で電界の各成分は

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ b \cos(\omega t + \phi_\eta) \end{bmatrix} \quad (2.12a)$$

と書くことができる。

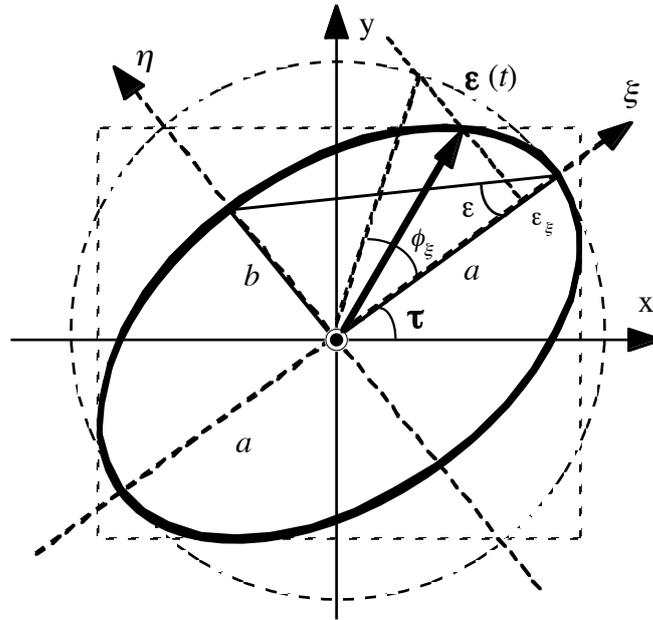


図2.8 だ円偏波の座標軸と電界成分

だ円の方程式(2.6)からも分かるように、 $\xi$ - $\eta$ 軸に沿った正規のだ円では位相的には  $\delta = \phi_\eta - \phi_\xi = \frac{\pi}{2}$  となり、 $\cos(\omega t + \phi_\eta) = -\sin(\omega t + \phi_\xi)$  から次のように変形される。ただし、 $\phi_\xi$  は絶対位相であり、図2.8に示すように大きさの関係から  $a \cos \phi_\xi = \varepsilon_\xi$  となる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ -b \sin(\omega t + \phi_\xi) \end{bmatrix} \quad (2.12b)$$

新しい $\xi$ - $\eta$ 軸はx-y軸を $\tau$ だけ回転して得られるので、電界は次のように変換できる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

式(2.2)、(2.12)を式(2.13)に代入することによって

$$\begin{aligned} a \cos(\omega t + \phi_\xi) &= |E_x| \cos(\omega t + \phi_x) \cos \tau + |E_y| \cos(\omega t + \phi_y) \sin \tau \\ b \sin(\omega t + \phi_\xi) &= |E_x| \cos(\omega t + \phi_x) \sin \tau - |E_y| \cos(\omega t + \phi_y) \cos \tau \end{aligned}$$

sin, cos 関数を展開し、 $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$  の係数を比較すれば

$$\begin{aligned} a \cos \phi_\xi &= |E_x| \cos \phi_x \cos \tau + |E_y| \cos \phi_y \sin \tau \\ a \sin \phi_\xi &= |E_x| \sin \phi_x \cos \tau + |E_y| \sin \phi_y \sin \tau \\ b \sin \phi_\xi &= |E_x| \cos \phi_x \sin \tau - |E_y| \cos \phi_y \cos \tau \\ -b \cos \phi_\xi &= |E_x| \sin \phi_x \sin \tau - |E_y| \sin \phi_y \cos \tau \end{aligned} \quad (2.14)$$

相対位相  $\delta = \phi_y - \phi_x$  を代入して整理すると、次の関係式が得られる。

$$a^2 + b^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 \quad (\text{エネルギー一定}) \quad (2.15)$$

$$ab = |E_x| |E_y| \sin(\phi_y - \phi_x) = |E_x| |E_y| \sin \delta \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{2} (|E_x|^2 - |E_y|^2) \sin 2\tau = |E_x| |E_y| \cos 2\tau \cos \delta \quad (2.17)$$

したがって、幾何学的パラメータとの関係は

$$\tan 2\tau = \frac{2 |E_x| |E_y| \cos \delta}{|E_x|^2 - |E_y|^2} \quad (2.18)$$

$$\sin 2\varepsilon = 2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2 |E_x| |E_y| \sin \delta}{|E_x|^2 + |E_y|^2} \quad (2.19)$$

となる。また、(2.12b)から、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ -b \sin(\omega t + \phi_\xi) \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t + \phi_\xi) \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ -\sin \varepsilon \sin(\omega t + \phi_\xi) \end{bmatrix} = \text{Re} \left\{ A \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \exp[j(\omega t + \phi_\xi)] \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

(2.13)より、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \text{Re} \left\{ A \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \exp[j(\omega t + \phi_\xi)] \right\} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} &= \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} \exp(j\omega t) \right\} \end{aligned} \quad \text{だから、} (|E_x|, |E_y|, \phi_x, \phi_y) \text{ と } (A, \varepsilon, \tau) \text{ の関係は次のように}$$

なる。

$$\begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} e^{j\phi_\xi} \quad (2.21)$$

この式からベクトル  $\begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} e^{j\phi_\xi}$  を  $-\tau$  だけ回転させたものに等しいと解釈できる。

ここで、(2.21)の位相関係を調べておこう。 $\phi = \phi_\xi - \phi_x$  において変形すると

$$\begin{bmatrix} |E_x| \\ |E_y| e^{j\delta} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} e^{j(\phi_\xi - \phi_x)} = A \begin{bmatrix} \cos \tau \cos \varepsilon - j \sin \tau \sin \varepsilon \\ \sin \tau \cos \varepsilon + j \cos \tau \sin \varepsilon \end{bmatrix} e^{j\phi}$$

このベクトルの1行目は実数なので、その位相は0とおくことができる。

$$\text{Arg}(\cos \tau \cos \varepsilon - j \sin \tau \sin \varepsilon) + \phi = 0 \quad (2.22)$$

したがって

$$\phi = \tan^{-1}(\tan \tau \tan \varepsilon) \quad (2.23)$$

それゆえ、
$$\begin{bmatrix} |E_x| \\ |E_y| \end{bmatrix} e^{j\delta} = A \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ j \sin \epsilon \end{bmatrix} e^{j \tan^{-1}(\tan \tau \tan \epsilon)}$$
 (2.24)

と書くこともできる。

### 2.3 ジョーンズベクトルによる表現

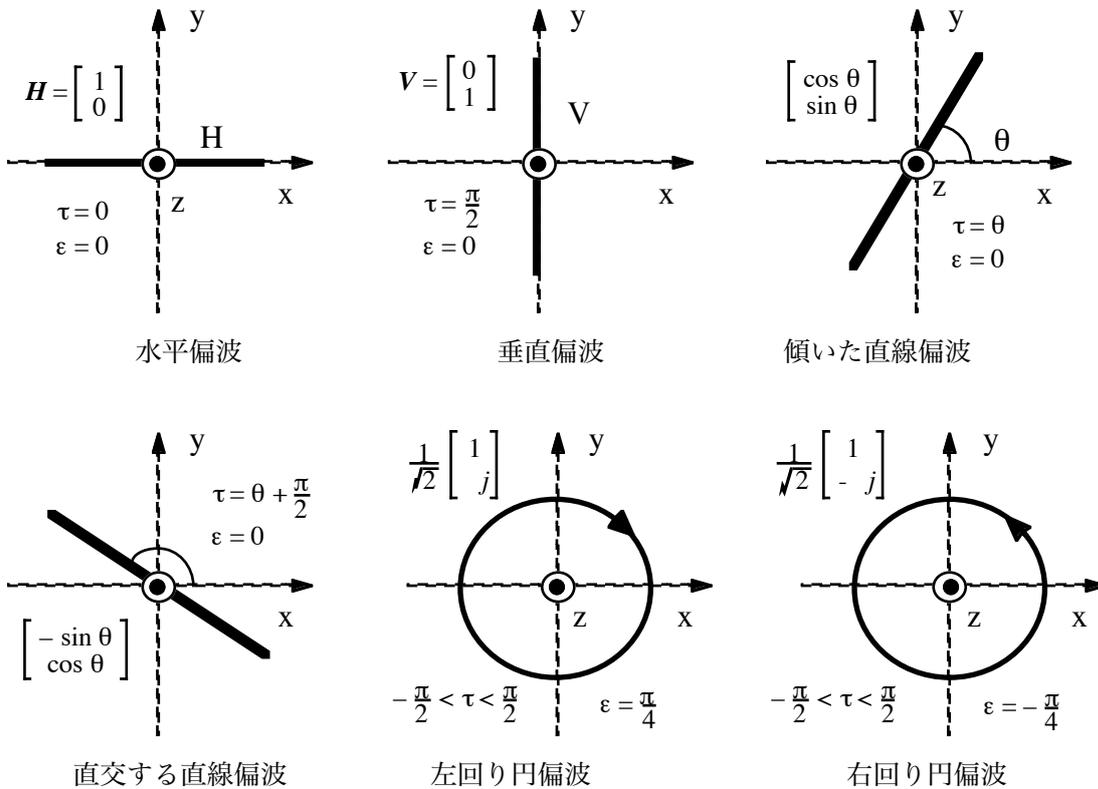
ここではフェーザを用いたベクトルで電界を表現する。式(2.21)のように  $E_0$  は複素振幅をもつ二次元ベクトルであり、次の形で書ける。

$$E_0 = \begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix}$$
 (2.25)

このベクトルは"ジョーンズ (Jones) ベクトル"と呼ばれている。x成分を実数化するように相対位相を使うと(2.24)の形になる。

$$E_0 = \begin{bmatrix} |E_x| \\ |E_y| e^{j\delta} \end{bmatrix}$$
 (2.26)

ジョーンズベクトルによるいくつかの偏波状態を図2.9に示す。



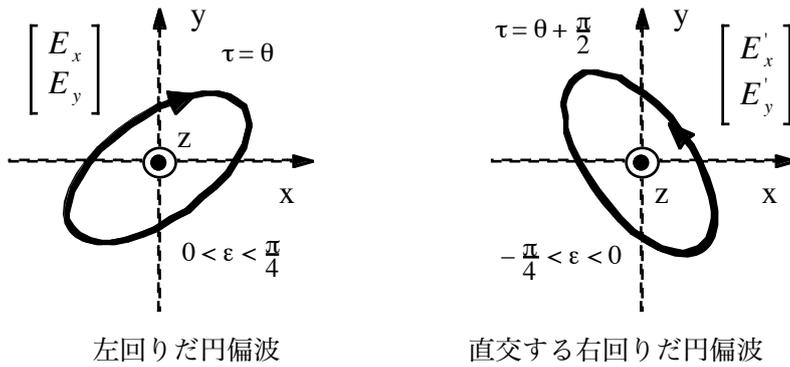


図2.9 ジョーンズベクトルによるいくつかの偏波状態

注意点として、ジョーンズベクトル表現には波の伝搬方向が含まれていないことがある。通常は右手座標系を仮定しているの普通ベクトル表現と同じであるが、波の後側から見る場合には座標軸の方向に注意が必要である。

### 偏波比 ρ によるジョーンズベクトル表現

ベクトル成分の数式表現として一般に直角座標成分が用いられる。しかし、直線偏波基底（直角座標系）だけでなく、円、だ円などの直交基底（座標系）もある。直角座標成分だけでなく、他の座標成分で表現しなければならない場合もでてくるので、ここでは座標系を考慮した偏波比によるベクトル表現を考えよう。基底に対応して表現方法も変わるので、まず任意の偏波基底（座標系）で表すことを考える。互いに直交する単位ベクトル  $\hat{a}, \hat{b}$  をもつ偏波基底ABに対して、その電界ベクトルは次のように書くことができる。

$$\mathbf{E}_0(AB) = E_A \hat{a} + E_B \hat{b} \tag{2.27}$$

ここで、 $E_A$  と  $E_B$  はベクトルの成分で、一般には複素数である。(AB) は基底を明示するために付けている。これを使って偏波比は次のように定義される。

$$\rho_{AB} = \frac{E_B}{E_A} = \left| \frac{E_B}{E_A} \right| e^{j(\phi_B - \phi_A)} = \left| \rho_{AB} \right| e^{j\delta_{AB}} \tag{2.28}$$

$\delta_{AB} = \phi_B - \phi_A$  は  $E_A$  と  $E_B$  の位相差である。この偏波比  $\rho_{AB}$  によって電界をジョーンズベクトル表現すると

$$\mathbf{E}_0(AB) = \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \end{bmatrix} = \left| E_A \right| e^{j\phi_A} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix} = \left| E_A \right| e^{j\phi_A} \frac{\sqrt{1 + \frac{E_B E_B^*}{E_A E_A^*}}}{\sqrt{1 + \frac{E_B E_B^*}{E_A E_A^*}}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix} = \frac{\left| \mathbf{E}_0 \right| e^{j\phi_A}}{\sqrt{1 + \rho_{AB} \rho_{AB}^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

ただし、

$$\left| \mathbf{E}_0 \right| = \sqrt{E_A E_A^* + E_B E_B^*} \tag{2.30}$$

偏波比を使ったこの表現方法も偏波状態の1つの表し方であり、コヒーレント波の解析でよく用いられる。任意の偏波基底変換とベクトル変換については付録2.3に述べることとし、ここでは最もよく使われる直線偏波基底(HV)の偏波比  $\rho_{HV}$  によるジョーンズベクトルを考察しておく。

$$\text{直線基底(HV)で電界ベクトルは} \quad \mathbf{E}_0(HV) = E_H \hat{\mathbf{H}} + E_V \hat{\mathbf{V}} \quad (2.31)$$

$$\text{であるので、偏波比 } \rho_{HV} \text{ は} \quad \rho_{HV} = \frac{E_V}{E_H} = \frac{|E_V|}{|E_H|} e^{j(\phi_V - \phi_H)} = \tan \gamma_{HV} e^{j\delta_{HV}} \quad (2.32)$$

ここで  $\gamma_{HV}$  は図2.10に定義される角度である。

$$\begin{aligned} |E_H| &= \sqrt{E_H^2 + E_V^2} \cos \gamma_{HV} \\ |E_V| &= \sqrt{E_H^2 + E_V^2} \sin \gamma_{HV} \end{aligned} \quad (2.33)$$

例えば振幅が1の水平偏波の場合、 $E_V=0$  となるので  $\rho_{HV}=0$  となり

$$\mathbf{E}(HV) = 1 \hat{\mathbf{H}} + 0 \hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{\sqrt{1+0 \cdot 0}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.34a)$$

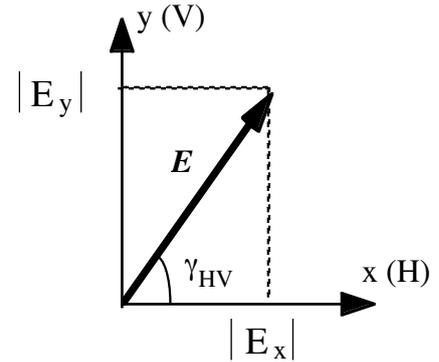


図2.2.10 電界成分と角度

$$45^\circ \text{傾いた直線偏波は } \rho_{HV} = 1 \quad \mathbf{E}(HV) = \frac{1}{\sqrt{1+1 \cdot 1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.34b)$$

である。また、左回り円偏波  $\hat{\mathbf{L}}$  を表現しようとする場合、IEEEの定義では、

$$\begin{aligned} |E_H| &= |E_V|, \quad \delta_{HV} = \phi_V - \phi_H = \frac{\pi}{2}, \quad \rho_{HV} = j \text{ なので} \\ \hat{\mathbf{L}}(HV) &\Rightarrow LHC = \frac{1}{\sqrt{1+(j)(-j)}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34c)$$

同様に右回り円偏波では、 $\rho_{HV} = -j$  になるので

$$\hat{\mathbf{R}}(HV) = \frac{1}{\sqrt{1+(-j)j}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad (2.34d)$$

となる。しかし、本文では基底変換の性質も含めて、右回り円偏波(RHC)に対しては以下の表現を使う。

$$\hat{\mathbf{R}}(HV) \Rightarrow RHC = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad (2.34e)$$

なお、IEEEの定義[6]では、(2.34c)、(2.34d)のジョーンズベクトル表現で円偏波が表現されており、互いに複素共役の関係にある。そこまでは正しいが、それを使った基底変換ではユニタリ行列の行列式が+1にならないのでLR間の位相保持ができない。そのため位相を扱うレーダポーラリメトリでは大きな問題が生じてくる。

物理的には同じ偏波状態を表していても、偏波基底が異なると偏波比は異なった値となり、ベクトルも変化する。表2.1にいくつかの偏波状態を示す。

表2.1 幾何学的パラメータ ( $\epsilon, \tau$ )、偏波比とJones ベクトルによる代表的な偏波状態の表現

| Polarization          | Geometric        |                  | HV basis    |  | LR basis    |  |
|-----------------------|------------------|------------------|-------------|--|-------------|--|
|                       | $\epsilon$       | $\tau$           | $\rho_{HV}$ | $\mathbf{E}$   | $\rho_{LR}$ | $\mathbf{E}$   |
| Linear Horizontal (H) | 0                | 0                | 0           | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$                     | $-j$        | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$     |
| Linear Vertical (V)   | 0                | $\frac{\pi}{2}$  | $\infty$    | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$                     | $j$         | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix}$     |
| 45 deg. Linear        | 0                | $\frac{\pi}{4}$  | 1           | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  | 1           | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-j \\ 1-j \end{bmatrix}$  |
| 135 deg. Linear       | 0                | $-\frac{\pi}{4}$ | -1          | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | -1          | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1-j \\ 1-j \end{bmatrix}$ |
| Left Handed Circular  | $\frac{\pi}{4}$  | any              | $j$         | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$  | 0           | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$                         |
| Right Handed Circular | $-\frac{\pi}{4}$ | any              | $-j$        | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix}$  | $\infty$    | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$                         |

ところで、偏波比  $\rho = \infty$  となって発散してしまう場合には、解析に不便なことがある。そのような場合、以下のようにスピナーパラメータを使うことがある。(2.1)を変形すると瞬時ベクトルは次のようになる。

$$\mathbf{E}(z, t) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma e^{j\delta} \end{bmatrix} e^{j(\omega t - kz + \alpha)} \right\} \quad (2.38)$$

この[ ] で囲まれた項目はスピナーと呼ばれる。スピナーのパラメータ  $\gamma, \delta$  は、ポアンカレ球上で偏波状態を指定するときにも使われる。

また、後述するように偏波ベクトルとして

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ j \sin \epsilon \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

を直接使うこともある。これは式(2.22)を用いることと同等であり、幾何学的パラメータによってジョーンズベクトルを明示することが可能である。

$$\mathbf{E}(HV) = A \begin{bmatrix} \cos \tau \cos \epsilon - j \sin \tau \sin \epsilon \\ \sin \tau \cos \epsilon + j \cos \tau \sin \epsilon \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

## 2.4 ストークスベクトルによる表現

風に揺れている麦畑をレーダで観測している場合を想定してみる。レーダパルスの照射時間が長い場合（例えば数ミリ秒の範囲）、麦は揺らいでいると考えられる。反射波は、麦畑中の数多くの散乱点からの反射波の合計となり、その合計位相は計測時間中でもランダムに変動する。一方、照射時間が短い場合（例えば数ナノ秒の範囲）、麦畑は静止していると考えられ、計測時間内で反射波の位相は一定と見なせる。

揺らぎの程度は計測時間とターゲットの揺らぐ速度の相対関係に依存する。一般に計測時間が十分短ければターゲットは静止していると思なせるので、反射波は位相のそろったコヒーレント波になり、逆に計測時間が長い場合には揺らぎのために位相が揃わないインコヒーレント波に近づく。したがって、レーダ反射波は位相の揃ったコヒーレント波と位相の揃っていないインコヒーレント波から成り立っていると考えることができる（図2.11を参照）。

コヒーレント波をCompletely polarized wave（完全偏波）ともいう。一方、インコヒーレント波をCompletely unpolarized wave（完全無偏波）ともいう。両者が混ざり合っている波を部分偏波（Partially polarized wave）という。

送信にはコヒーレント波を送るが、揺らぎによってインコヒーレント波になることをde-polarizationという。一方、完全に偏波した波がターゲットに当たって偏波状態を変えた場合もdepolarizationという言葉を使うことがある。例えば、H偏波で送信してV偏波が発生した場合、depolarizationと言われることがある。しかし、この場合、V偏波が位相が揃っていれば（コヒーレントであれば）波全体として完全偏波のままである。波の性質から考えて、交差偏波が発生する場合には"re-polarization"という言葉を使った方が適切と思われる[5]。この点も研究者によって統一されていない状況にある。

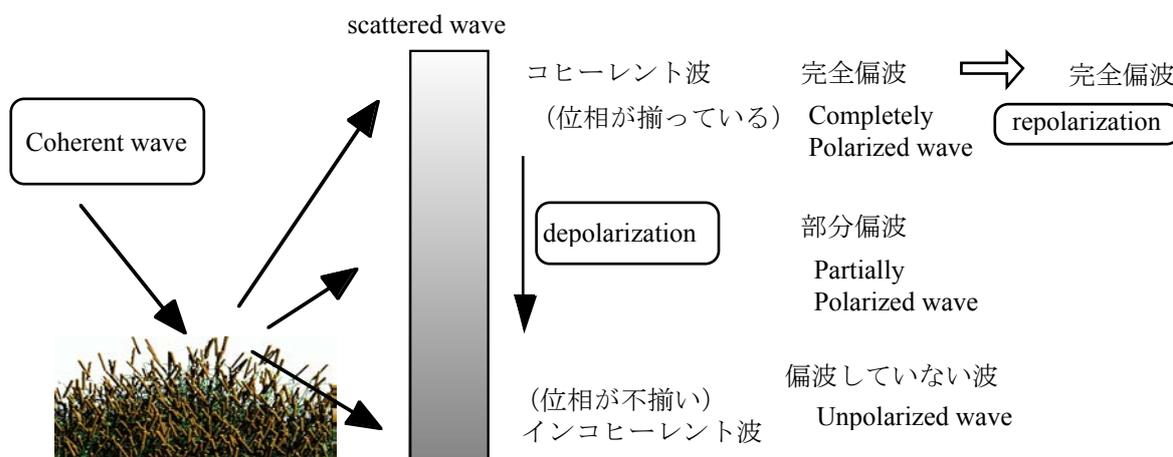


図2.11 散乱波位相の揃い具合と偏波度合い

前項まで完全偏波(Completely polarized wave)について扱ってきた。完全偏波した波とは $|E_A|$ ,  $|E_B|$ ,  $\delta_{AB}$ が観測時間中に定数であるか、あるいは少なくとも時間に関して非常にゆっくり変動する波で、位相がそろっているコヒーレントな波と等価である。しかし、観測時間中に位相がランダムに変わる波や部分的に偏波した波を扱うには今までの手法で取り扱うことはできない。完全偏波も含め、これらのすべての波を取り扱うにはストークスパラメータを用いなければならない。ストークスパラメータは1852年に Sir George Stokes によってつくられたものである。ストークスパラメータの利点は全ての要素が実数であり、電力測定によって決定できることである。特に光・ミリ波のような高い周波数領域では正確な位相測定が困難なため、波の偏波情報を得る際に威力を発揮する。

## (a) 完全偏波に対するストークスベクトル

ストークスベクトルは  $\mathbf{g}$  で表され、その4成分  $g_0, g_1, g_2, g_3$  がストークスパラメータと呼ばれている。単一周波数の完全偏波した平面波では次の関係がある。

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_H|^2 + |E_V|^2 \\ |E_H|^2 - |E_V|^2 \\ 2 \operatorname{Re}(E_V E_H^*) \\ 2 \operatorname{Im}(E_V E_H^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_H|^2 + |E_V|^2 \\ |E_H|^2 - |E_V|^2 \\ 2 |E_H| |E_V| \cos \delta \\ 2 |E_H| |E_V| \sin \delta \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\tau \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\tau \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$|E_H|, |E_V|$  は  $E_H, E_V$  成分の振幅、 $\delta$  は相対位相である。完全偏波に対しては次の関係が成り立つ。

$$g_0^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \quad (2.41)$$

これらの成分は図2.15に示したポアンカレ球の直角座標成分に対応している。また、これらの物理的な内容は以下のベクトル変換から了解される。

円偏波と直線偏波のベクトル成分の関係は付録2.3より

$$E_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_H - j E_V) \quad , \quad E_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (-j E_H + E_V) \quad (2.42)$$

これから次式が得られる。

$$\begin{aligned} |E_L|^2 &= E_L E_L^* = \frac{1}{2} (|E_H|^2 + |E_V|^2 + 2 \operatorname{Im}(E_V E_H^*)) \\ |E_R|^2 &= E_R E_R^* = \frac{1}{2} (|E_H|^2 + |E_V|^2 - 2 \operatorname{Im}(E_V E_H^*)) \\ E_L E_R^* &= \frac{1}{2} (j |E_H|^2 - j |E_V|^2 + 2 \operatorname{Re}(E_V E_H^*)) \end{aligned} \quad (2.43)$$

ストークスパラメータを円偏波成分で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} g_0 &= |E_H|^2 + |E_V|^2 = |E_L|^2 + |E_R|^2 \\ g_1 &= |E_H|^2 - |E_V|^2 = 2 \operatorname{Im}(E_L E_R^*) \\ g_2 &= 2 \operatorname{Re}(E_V E_H^*) = 2 \operatorname{Re}(E_L E_R^*) \\ g_3 &= 2 \operatorname{Im}(E_V E_H^*) = |E_L|^2 - |E_R|^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

45°, 135°回転した直線偏波基底では

$$E_{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_H + E_V) \quad E_{135^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-E_H + E_V) \quad (2.45)$$

なので、

$$|E_{45^\circ}|^2 = E_{45^\circ} E_{45^\circ}^* = \frac{1}{2} (|E_H|^2 + |E_V|^2 + 2 \operatorname{Re}(E_V E_H^*))$$

$$\begin{aligned} |E_{135^\circ}|^2 &= E_{135^\circ} E_{135^\circ}^* = \frac{1}{2} \left( |E_H|^2 + |E_V|^2 - 2 \operatorname{Re}(E_V E_H^*) \right) \\ E_{45^\circ} E_{135^\circ}^* &= \frac{1}{2} \left( -|E_H|^2 + |E_V|^2 - j 2 \operatorname{Im}(E_V E_H^*) \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

が得られ、ストークスパラメータに変換すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} g_0 &= |E_H|^2 + |E_V|^2 = |E_{45^\circ}|^2 + |E_{135^\circ}|^2 \\ g_1 &= |E_H|^2 - |E_V|^2 = -2 \operatorname{Re}(E_{45^\circ} E_{135^\circ}^*) \\ g_2 &= 2 \operatorname{Re}(E_V E_H^*) = |E_{45^\circ}|^2 - |E_{135^\circ}|^2 \\ g_3 &= 2 \operatorname{Im}(E_V E_H^*) = -2 \operatorname{Im}(E_{45^\circ} E_{135^\circ}^*) \end{aligned} \quad (2.47)$$

したがって(2.44)と(2.47)を使ってストークスパラメータは表2.2のように表現することが可能である。この表より、 $g_0$ は全電力を表し偏波基底に依存しない量であることが分かる。 $g_1$ は水平偏波と垂直偏波の電力差、 $g_2$ は45°と135°の直線偏波電力差、 $g_3$ は左回り円偏波と右回り円偏波の電力差を表わしていることが分かる。もし、 $g_1, g_2, g_3$ のいずれかが0でなければ、完全偏波した成分が存在することになる。

表2.2 ストークスパラメータの表現

| Stokes Parameter | HV                               | 45/135 Linear  | LR                               | Geometric Parameter                |
|------------------|----------------------------------|--|----------------------------------|------------------------------------|
| $g_0$            | $ E_H ^2 +  E_V ^2$              | $ E_{45^\circ} ^2 +  E_{135^\circ} ^2$               | $ E_L ^2 +  E_R ^2$              | $A^2$                              |
| $g_1$            | $ E_H ^2 -  E_V ^2$              | $-2 \operatorname{Re}(E_{45^\circ} E_{135^\circ}^*)$ | $2 \operatorname{Im}(E_L E_R^*)$ | $A^2 \cos 2\varepsilon \cos 2\tau$ |
| $g_2$            | $2 \operatorname{Re}(E_V E_H^*)$ | $ E_{45^\circ} ^2 -  E_{135^\circ} ^2$               | $2 \operatorname{Re}(E_L E_R^*)$ | $A^2 \cos 2\varepsilon \sin 2\tau$ |
| $g_3$            | $2 \operatorname{Im}(E_V E_H^*)$ | $-2 \operatorname{Im}(E_{45^\circ} E_{135^\circ}^*)$ | $ E_L ^2 -  E_R ^2$              | $A^2 \sin 2\varepsilon$            |

一方、ストークスパラメータは幾何学的パラメータとも直結しており、ストークスパラメータを測定することによって偏波状態を求めることができる。

$$A^2 = g_0 \quad (2.48)$$

$$\sin 2\varepsilon = \frac{g_3}{g_0} \quad (2.49)$$

$$\tan 2\tau = \frac{g_2}{g_1} \quad (2.50)$$

## (b) 部分偏波に対するストークスペクトル

インコヒーレント波（位相の揃っていない波）や部分的にインコヒーレントな波を扱う際に集合平均が使われる。エルゴード性を仮定して時間平均あるいは空間集合平均をとってみる。次のストークスペクトル表現で $\langle \dots \rangle$ は平均操作を示す。

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \langle g_0 \rangle \\ \langle g_1 \rangle \\ \langle g_2 \rangle \\ \langle g_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle |E_H|^2 \rangle + \langle |E_V|^2 \rangle \\ \langle |E_H|^2 \rangle - \langle |E_V|^2 \rangle \\ 2 \operatorname{Re} \langle E_V E_H^* \rangle \\ 2 \operatorname{Im} \langle E_V E_H^* \rangle \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\text{これから} \quad \langle g_0 \rangle^2 \geq \langle g_1 \rangle^2 + \langle g_2 \rangle^2 + \langle g_3 \rangle^2 \quad (2.60)$$

が成り立つことが分かる。全電力の中にどの程度コヒーレントな成分が含まれているかを表す指標として偏波度 (DoP: Degree of Polarization) が定義されている。

$$\text{Degree of Polarization} \quad DoP = \frac{\sqrt{\langle g_1 \rangle^2 + \langle g_2 \rangle^2 + \langle g_3 \rangle^2}}{\langle g_0 \rangle} \quad (2.61)$$

## Degree of Polarizationによる波の分類

$DoP = 1$  は完全偏波 (completely polarized wave) といい、完全にコヒーレントな波を表す。ストークスパラメータの間には次の関係式が成り立つ。

$$\langle g_0 \rangle^2 = \langle g_1 \rangle^2 + \langle g_2 \rangle^2 + \langle g_3 \rangle^2 \quad (2.63)$$

$DoP = 0$  を完全無偏波 (completely unpolarized wave) といい、完全にインコヒーレントな波となる。ストークスパラメータは次のようになる。

$$\langle g_0 \rangle^2 \neq 0 \quad \langle g_1 \rangle^2 = \langle g_2 \rangle^2 = \langle g_3 \rangle^2 = 0 \quad (2.64)$$

$0 \leq DoP \leq 1$  を部分偏波という。測定されるほとんどの波がこの範疇に入る。部分偏波した波はコヒーレント波とインコヒーレント波の和であるので次のようにも書くことができる。

$$\langle g_1 \rangle^2 + \langle g_2 \rangle^2 + \langle g_3 \rangle^2 = q \quad (2.65)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \langle g_0 \rangle \\ \langle g_1 \rangle \\ \langle g_2 \rangle \\ \langle g_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \langle g_1 \rangle \\ \langle g_2 \rangle \\ \langle g_3 \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle g_0 \rangle - q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

polarized + unpolarized

## 2.5 偏波パラメータとポアンカレ球

視覚的な偏波表現方法としてポアンカレ球がある。図2.13にポアンカレ偏波球を示す。数学者ポアンカレ(Poincare)によって考案されたものである。球面上の一点は、ある一つの偏波状態を示しており、すべての偏波状態と1対1の対応がある。球面上の点によって偏波状態が指定できる。

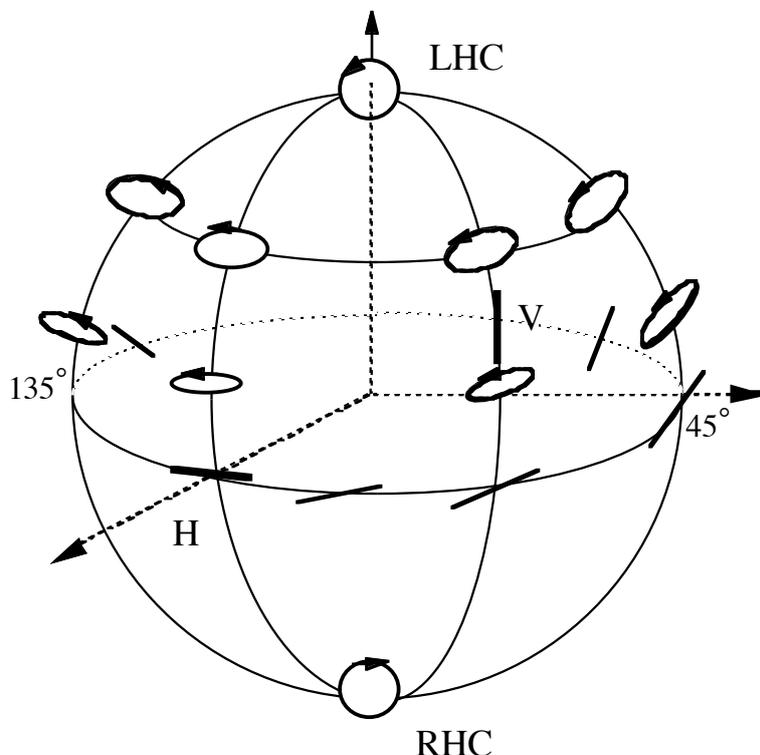


図2.13 ポアンカレ球と偏波状態(上半球は左回り, 下半球は右回り)

球面上の座標を指定するにはいくつかの方法がある。今まで示したパラメータに角度  $2\gamma_{HV}$  と  $\delta_{HV}$ , あるいは幾何学的パラメータ  $2\varepsilon, 2\tau$  がある。それらのパラメータの取り方を図2.14に示す。なぜこのような出発点Hとパラメータの取り方をするかは、各パラメータ間の関係やストークスベクトルによる表現とも密接に関わっており、結果的に非常にうまくできている。

$2\gamma = 2\gamma_{HV}$  は、赤道上的点H(水平偏波を表す)から球面上の点Pまでの大圏行路距離HPを表し、 $0 \leq 2\gamma \leq \pi$  の範囲で球の裏側までカバーする。また  $\delta = \delta_{HV} = \phi_y - \phi_x$  は、点Hにおいて赤道とHPのなす角度( $-\pi \leq \delta \leq \pi$ )である。例えば、 $\delta = \phi_y - \phi_x = \pi/2$  は左回り円偏波(LHC)であり、 $\delta = -\pi/2$  は右回り円偏波(RHC)になっている。

一方、幾何学的パラメータ( $\varepsilon, \tau$ )については図2.14に示すように  $2\tau$  がOH軸から測られる赤道上的の角度で、経度( $-\pi \leq 2\tau \leq \pi$ )に対応する。 $+Y$ 軸に相当する角度は  $2\tau = 90^\circ$  なので、 $\tau = 45^\circ$  の直線偏波を表す。そして点Hの裏側は  $\tau = 90^\circ$  となり、この角度は垂直偏波になっている。また、 $2\varepsilon$  は赤道面とOP軸のなす角度で、緯度( $-\pi/2 \leq 2\varepsilon \leq \pi/2$ )に対応している。北極は  $2\varepsilon = 90^\circ$  ( $\varepsilon = 45^\circ$ ) でLHCを表し、南極は  $2\varepsilon = -90^\circ$  ( $\varepsilon = -45^\circ$ ) でRHCを表す(図2.16)。したがって、各パラメータの定義式と一致している。

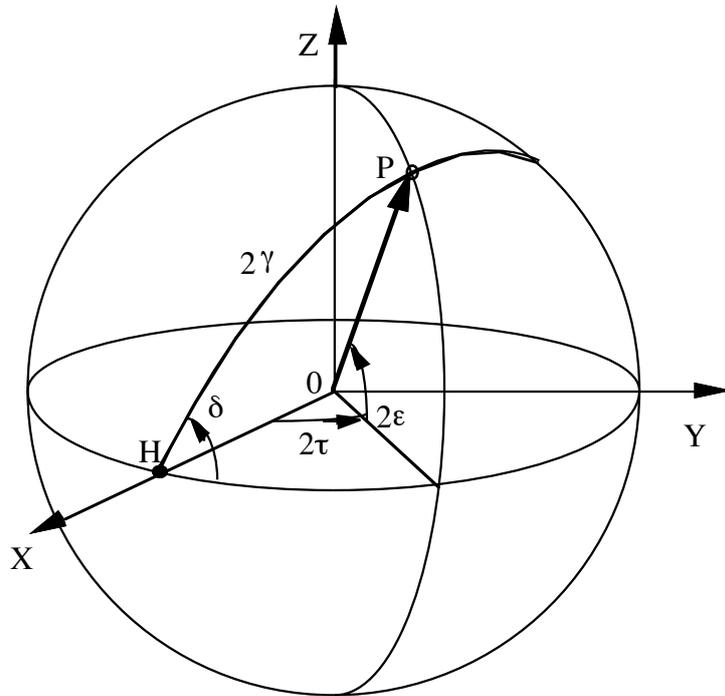


図2.14 ポアンカレ球と幾何学的パラメータ

スピナーパラメータ  $\gamma_{HV} = \gamma, \delta_{HV} = \delta$  は、幾何学的パラメータ  $\epsilon, \tau$  と次の関係がある。図2.15より

$$\sin 2\epsilon = \sin 2\gamma \sin \delta \tag{2.67}$$

式(2.18)を使って 
$$\tan 2\tau = \frac{2 \tan \gamma}{1 - \tan^2 \gamma} \cos \delta = \tan 2\gamma \cos \delta \tag{2.68}$$

また、逆の関係として 
$$\frac{\sin^2 2\epsilon}{\sin^2 2\gamma} + \frac{\tan^2 2\tau}{\tan^2 2\gamma} = 1 \tag{2.69}$$

$\sin^2 2\gamma \cos^2 2\tau$  を両辺に掛けて整理すると 
$$\cos 2\gamma = \cos 2\tau \cos 2\epsilon \tag{2.70}$$

$$\tan \delta = \frac{\sin 2\epsilon}{\tan 2\tau \cos 2\gamma} = \frac{\tan 2\epsilon}{\sin 2\tau} \tag{2.71}$$

式 (2.67) から(2.71)までの関係を図で書くと、結果的に図2.15のようになっている。

最も特徴的なことは、ストークスベクトル成分 ( $g_1, g_2, g_3$ ) がポアンカレ球の直角座標軸成分になっていることである。通常の球座標でX軸が  $g_1$  , Y軸が  $g_2$  , Z軸が  $g_3$  に対応する。また、幾何学的パラメータ ( $\epsilon, \tau$ ) は、図2.14のように緯度、経度を表わしており、 $2\tau$  が球座標における  $\varphi$  方向、 $\frac{\pi}{2} - 2\epsilon$  が  $\theta$  方向に相当する。

$$\text{緯度} = 2\epsilon \quad \text{経度} = 2\tau$$

式(2.40)から 
$$\frac{g_1}{g_0} = \cos 2\tau \cos 2\epsilon = \cos 2\gamma \tag{2.72}$$

なので、 $\cos 2\gamma$ はStokesベクトル $\mathbf{g}$ がX軸となす角の方向余弦である。それゆえ、点Hから点Pまでのアーク距離(大圏行路距離)は、 $g_0 = 1$ とすれば、 $HP = g_0(2\gamma_{HP}) = 2\gamma$ のように表せる。また、角度 $\delta$ は赤道面と最大円(アーク距離方向)とのなす角度であり、XOY面とXOP面のなす角度に等しい。点PをYOZ面に投影すれば、Y軸と投影点P'から作られる角度 $\angle YOP' = \delta$ となる。YOZ面で次式が成り立つことが分かる。

$$\tan \delta = \tan \angle YOP' = \frac{g_3}{g_2} \tag{2.73}$$

したがって、ポアンカレ球上の点Pは、同じ場所でも偏波状態の表現方法

$$\begin{aligned} &(2\gamma, \delta), \left( 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}, -\pi \leq \delta \leq \pi \right) \\ &(2\tau, 2\varepsilon), \left( -\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{4} \right) \\ &(g_1, g_2, g_3), (-1 \leq g_1, g_2, g_3 \leq 1) \end{aligned}$$

によって図2.15のように表されることが分かる。このうち、最も分かり易いパラメータは $(2\tau, 2\varepsilon)$ と $(g_1, g_2, g_3)$ であろう。 $(2\tau, 2\varepsilon)$ は全体の表記の基本をなしている。

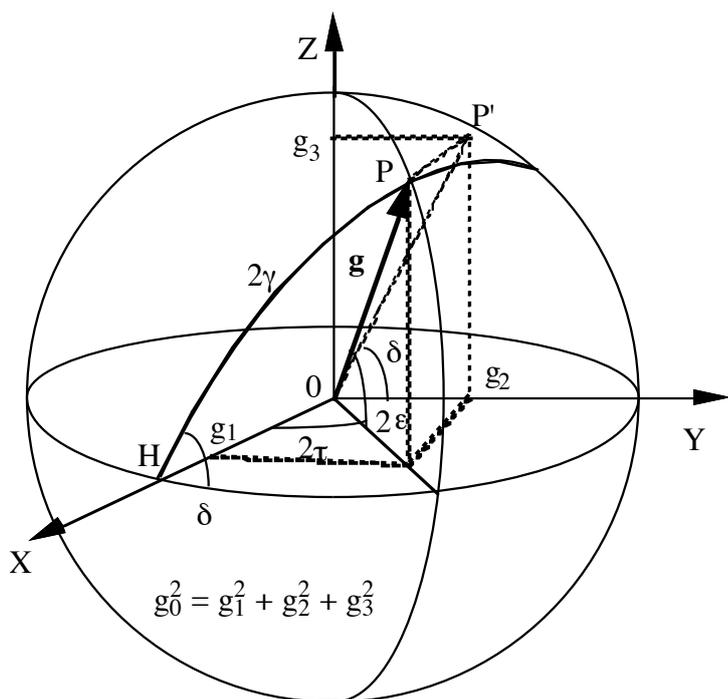


図2.15 ポアンカレ球とストークスベクトル

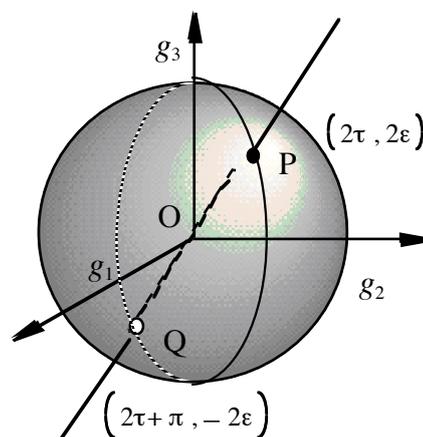


図2.16 直交偏波状態 (PとQ)

重要な点として、図2.16のようにポアンカレ球上にある点Pを指定すると、球の真裏の点Q (anti-podal point)は直交した偏波状態になっていることである。例えば、Hの裏側はVであり、HとVは互いに直交している。また、北極は左回り円偏波(LHC)、南極は右回り円偏波(RHC)で直交する。この直交性は球面上のどの点でも成り立っている。

## 2.6 偏波ベクトルによる表現

ポアンカレ球の中心を貫く直線によって直交する偏波状態が直観的にも理解できるので，改めて式の上でも直交する偏波状態を考えてみよう．再度，式(2.21)を繰り返してみる．

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} e^{j\phi} = A \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} e^{j\phi_\varepsilon} \quad (2.21)$$

この式から位相  $\phi_\varepsilon$  を無視して（正確に測定することが難しいため），偏波ベクトル  $\mathbf{p}$  を

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

とおく．これに直交する偏波状態は，ポアンカレ球の裏側に配置しているので，

$$2\tau \Rightarrow 2\tau + \pi \quad \left(\tau \Rightarrow \tau + \frac{\pi}{2}\right) \quad 2\varepsilon \Rightarrow -2\varepsilon \quad (\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon) \quad (2.75)$$

とすれば得られることになる．したがって，直交する偏波ベクトル  $\mathbf{p}_\perp$  は次式で与えられる（図2.17）．

$$\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}\left(\tau + \frac{\pi}{2}, -\varepsilon\right) = \begin{bmatrix} -\sin \tau & -\cos \tau \\ \cos \tau & -\sin \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ -j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

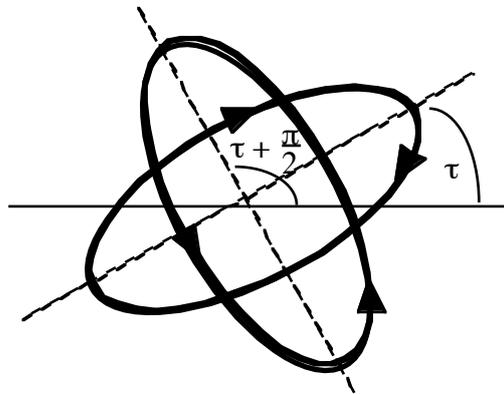


図2.17 直交偏波状態

例えば，代表的な偏波状態は式(2.74)，(2.76)の偏波ベクトルを使って以下のように表される．

$$\text{水平偏波} \quad \tau = 0, \varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.77a)$$

$$\text{直交偏波（垂直）} \quad \mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}\left(\frac{\pi}{2}, -0\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.77b)$$

$$\text{左回り円偏波} \quad \varepsilon = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}\left(\tau, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \frac{e^{-j\tau}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

$$\text{直交円偏波（右回り）} \quad \mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}\left(\tau + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} -\sin \tau & -\cos \tau \\ \cos \tau & -\sin \tau \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{e^{j\tau}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

これらの結果は表2.1のものと同じ表現であり，ジョーンズベクトルとも等価である。

円偏波において  $e^{-j\tau}, e^{j\tau}$  の項目は傾き角の回転を表し，円を回転しても同じ円になるので意味をもたない。もし， $\tau=0$  ととれば，左回りと右回りの偏波ベクトルとして

$$\hat{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad \hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

が得られる（注2.4）。

偏波ベクトルは次の直交（ユニタリ内積）条件を満たしている。

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_\perp^* = 0 \quad (2.81)$$

### 2.3 偏波パラメータ間の関係

今まで，電界の振幅，位相から出発し，各種パラメータによってだ円偏波を表現してきた。表現方法はいろいろあるが，本質的に同じものを指している。視覚的に偏波状態を捉えるには，ポアンカレ球が最も優れている。これらのパラメータの相互関係を図2.3.1に示す。

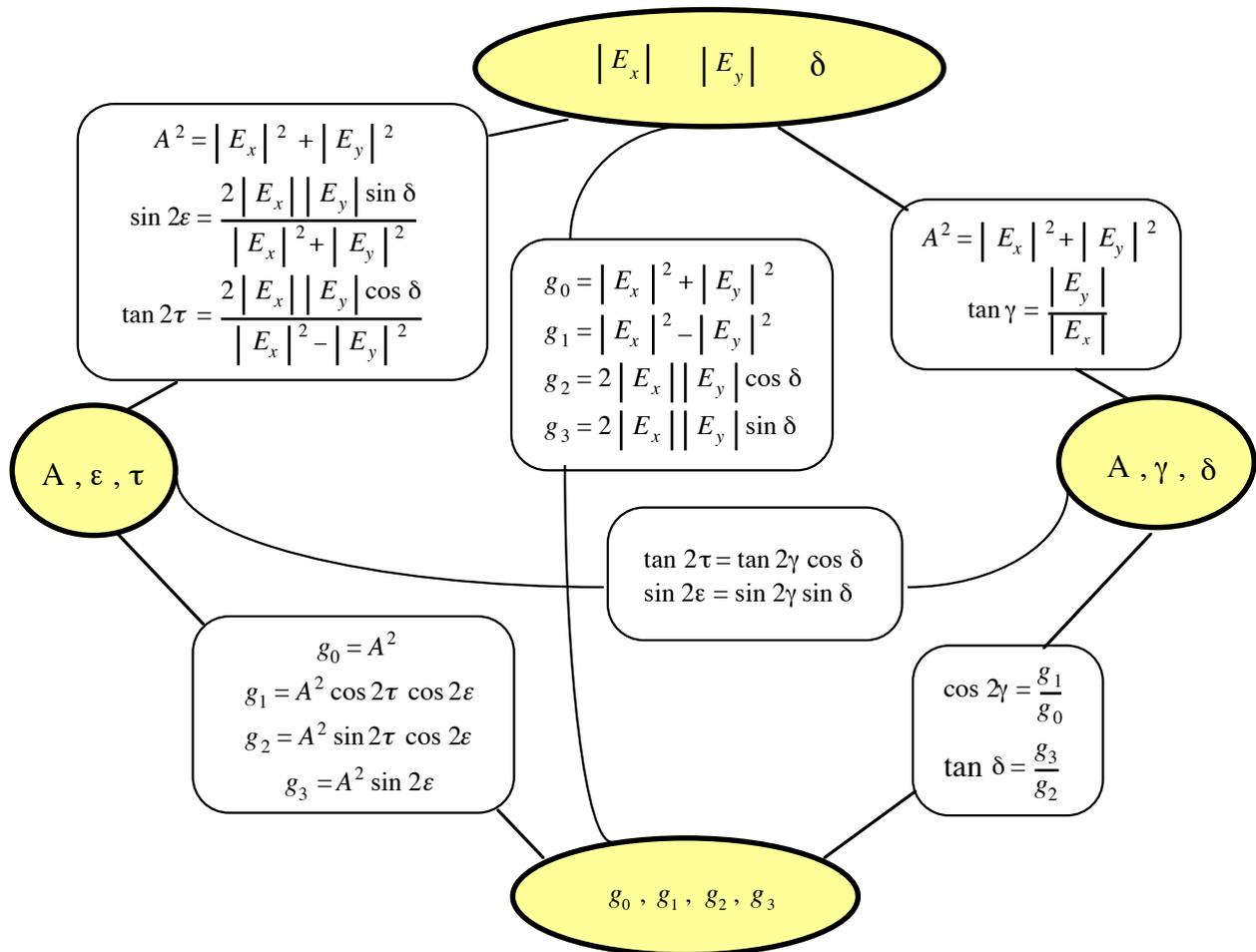


図2.3.1 だ円偏波を表すパラメータの相互関係

なお、偏波比と幾何学的パラメータには次の関係が成り立つ。

$$\text{電界表現} \quad \begin{bmatrix} E_H \\ E_V \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

偏波比はellipticity, tilt angleを使って表現できる。

$$\rho = \frac{E_V}{E_H} = \frac{\sin \tau \cos \varepsilon + j \cos \tau \sin \varepsilon}{\cos \tau \cos \varepsilon - j \sin \tau \sin \varepsilon} = \frac{\tan \tau + j \tan \varepsilon}{1 - j \tan \tau \tan \varepsilon} \quad (2.3.2)$$

したがって次の関係が導かれる。

$$\tan 2\tau = \frac{2 \operatorname{Re}(\rho)}{1 - |\rho|^2}, \quad \sin 2\varepsilon = \frac{2 \operatorname{Im}(\rho)}{1 + |\rho|^2} \quad (2.3.3)$$

この関係は図2.3.2のように表すことができる。

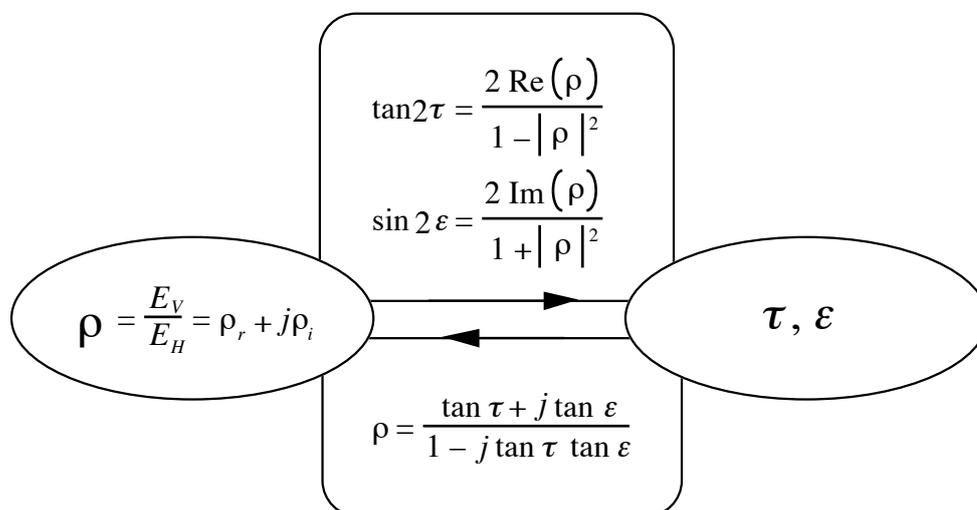


図2.3.2 偏波比と幾何学的パラメータの関係