5章 ベクトルの回転

ベクトルの回転の定義は

$$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{A} = rot\ \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\boldsymbol{n}}{\Delta S}\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}} \qquad (5.1)$$

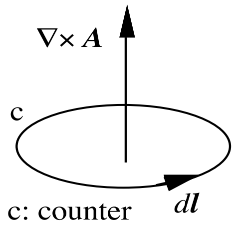
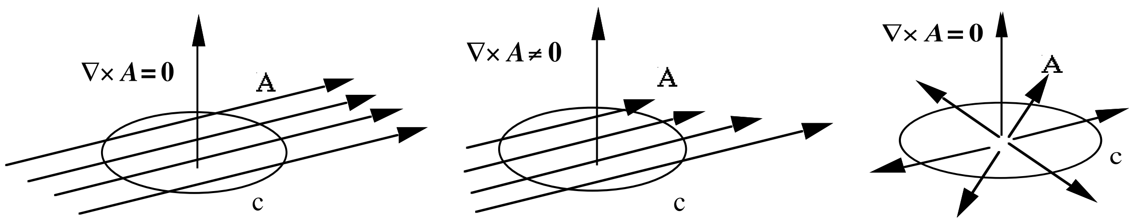


図5.1　ベクトルの回転

であり，回転量を調べる演算子である．ローテーションA，カールA，Aの回転とも読む．

図5.1のように，閉曲線cに沿ってベクトル$\boldsymbol{A}$の線積分を行うものとする．線積分はベクトル$\boldsymbol{A}$と線素$d\boldsymbol{l}$の内積だから，ある大きさ（スカラー量）が得られる．その大きさをもち，面と垂直の方向に向くベクトルが$\nabla\times\boldsymbol{A}$である．物理的なイメージは渦巻きを想像するとよい．渦巻きの周方向にベクトル$\boldsymbol{A}$が回っているとする（ベクトル$\boldsymbol{A}$を速度と考える）と，$\nabla\times\boldsymbol{A}$は渦の軸方向のベクトルに対応する．速度が速いほど渦の深さは大きくなる．その方向$\boldsymbol{n}$は, 閉曲線に沿ってベクトルを左回りに線積分したとき, 右ネジの進む向きになる．



(a)　(b)　(c)

図5.2　ベクトル $\boldsymbol{A}$とその回転成分

もし，図5.2(a) のようにベクトル$\boldsymbol{A}$がまっすぐに向き, 場所によって変化がないならば, 閉曲線に沿った線積は全体として0となることが直観的に理解されよう．その結果，$\nabla\times\boldsymbol{A}$は0となり, 渦を巻いている成分は無いことになる．

また, (b)では場所によってベクトルの大きさが違うので，線積分全体としては値をもち，$\nabla\times\boldsymbol{A}$は0にならない．速度で言えば, 速い方から遅い方に流れ込んでくるので，渦が発生する．海流によってできる鳴戸のうず潮，洗濯機の渦などを想像するとよい．

(c)では湧き出しがある場合で, ベクトル$\boldsymbol{A}$の向きと閉曲線の線素が互いに直交しているため線積分は0となり，$\nabla\times\boldsymbol{A}$は0となる．泉のように湧き出しはあるが, その流れが閉曲線と直交しているような場合，渦は無いことになる．

以上のように$\nabla\times\boldsymbol{A}$は渦があるか無いかを調べる基準でもある．

閉曲線の形はどのような形でもよい. $\nabla\times\boldsymbol{A}$ は閉曲線を限りなく小さくした極限として定義されている. ここでは, 直角座標, 円筒座標, 球座標系における $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の表現式を導く.

5.1 直角座標系による表現

まず, 最も基本的な直角座標系から出発する. 図5.3のようにx - y 平面に辺の長さが Δx, Δyの微小方形ループ (閉曲線) を作り, 回転の定義にしたがってベクトルの線積分を行ってみよう.

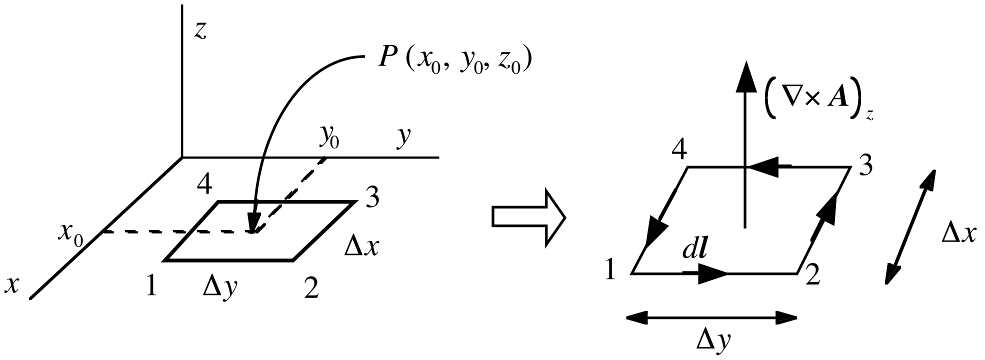


図5.3　直角座標系 x – y 面における回転

微小方形ループの中心の座標Pを(x_0 , y_0 , z_0)とし, その位置におけるベクトルを

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,(x_0, y_0, z_0) = \boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z$$

$$A_x = A_x\,(x_0, y_0, z_0)$$

$$A_y = A_y\,(x_0, y_0, z_0)$$

$$A_z = A_z\,(x_0, y_0, z_0) \tag{5.1.1}$$

とする. 周回積分は各辺の積分に分解できる.

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^2 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_2^3 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_3^4 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_4^1 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{5.1.2}$$

辺1-2についての線積分 $\int_1^2 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$ において, 辺の長さΔyは微小であり, その線素$d\boldsymbol{l}$は

$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_y\, dy \qquad \left(\ \Delta y = \int \boldsymbol{a}_y\cdot d\boldsymbol{l} = \int dy\ \right) \tag{5.1.3}$$

とおける．したがって内積演算では，ベクトルのA_y成分だけを考慮すればよい．なお，A_y成分に関して，ループの中心Pで $A_y = A_y(x_0, y_0, z_0)$ であるが, 辺1-2では位置が

$$x = x_0 + \frac{\Delta x}{2}$$

なので$A_y(x_0, y_0, z_0)$をそのまま使うわけには行かない．そのため, x_0 から $\frac{\Delta x}{2}$ だけ移動した位置におけるテイラー展開を利用する． 一次近似で

$$A_y(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \approx A_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} = A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{5.1.4}$$

と置くことができる．したがって, 積分は次のようになる．

$$\int_1^2 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = A_y(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)\,\Delta y \approx A_y(x_0, y_0, z_0)\,\Delta y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\,\Delta y = A_y\,\Delta y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x\,\Delta y}{2} \tag{5.1.5}$$

辺2-3における積分で，線素は　$d\boldsymbol{l} = -\,\boldsymbol{a}_x\,dx$

また，ベクトルはA_x成分が対象となる．A_xを辺2-3($y = y_0 + \frac{\Delta y}{2}$)上でテイラー展開すると

$$A_x(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) \approx A_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}$$

したがって，積分は次のようになる．

$$\int_2^3 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = -\,A_x(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)\,\Delta x \approx -\,A_x(x_0, y_0, z_0)\,\Delta x - \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\Delta x\,\Delta y}{2} \tag{5.1.6}$$

辺3-4では, $d\boldsymbol{l} = -\,\boldsymbol{a}_y\,dy$

$$A_y(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \approx A_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$$

$$\int_3^4 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = -\,A_y(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)\,\Delta y \approx -\,A_y(x_0, y_0, z_0)\,\Delta y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x\Delta y}{2} \tag{5.1.7}$$

辺4-1では, $d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_x\,dx$

$$A_x(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0) \approx A_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}$$

$$\int_4^1 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = A_x(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)\,\Delta x \approx A_x(x_0, y_0, z_0)\,\Delta x - \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\Delta x\,\Delta y}{2} \tag{5.1.8}$$

それゆえ, 一周にわたる線積分は(5.1.5)-(5.1.8)を加え合わせ，全体として

$$\oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \;=\; \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \, \Delta y \tag{5.1.9}$$

となる．以上により，定義式(5.1)の周回積分が得られた．

次に(5.1)の単位ベクトルの方向であるが，積分経路に対して右ネジの向きをとるので，正の z 方向となる($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_z$)．この微小ループ（x-y平面）に対する $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の z 方向成分は，

$$\left(\nabla \times \boldsymbol{A} \right)_z = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}_z}{\Delta S} \oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \, \Delta y \;= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \tag{5.1.10}$$

である．

微小ループがy-z面内にある場合, 同様な計算を行って，次の結果が得られる．

$$\Delta \boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} \Delta S = \boldsymbol{a}_x \, \Delta y \, \Delta z$$

$$\left(\nabla \times \boldsymbol{A} \right)_x = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}_x}{\Delta S} \oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \, \Delta z \;= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \tag{5.1.11}$$

微小ループがz-x面内にある場合も同様である．

$$\Delta \boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} \Delta S = \boldsymbol{a}_y \, \Delta z \, \Delta x$$

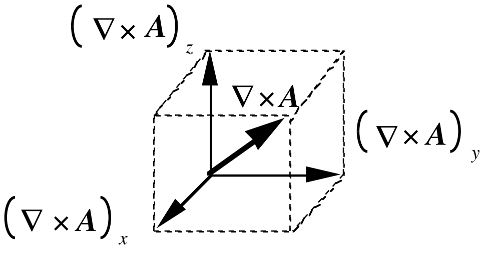
$$\left(\nabla \times \boldsymbol{A} \right)_y = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}_y}{\Delta S} \oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \Delta z \, \Delta x = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \tag{5.1.12}$$

したがって, 各成分を加え合わせると

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad + \boldsymbol{a}_y \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad + \boldsymbol{a}_z \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}} \tag{5.1.13}$$

が得られる．これが直角座標系における回転の表現式である．これを覚えることは難しいが,次のような行列式で書くことができる．

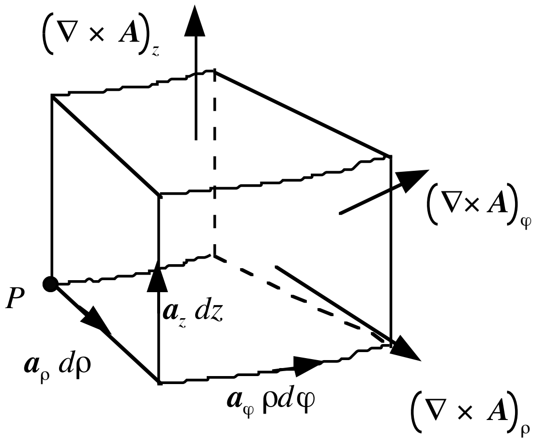
$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$



注意すべき点はベクトル$\boldsymbol{A}$に∇×を施すと, その結果もまたベクトルになることである．その意味で∇演算子もベクトルのような性質を持っているといえる．

5.2 円筒座標系による表現

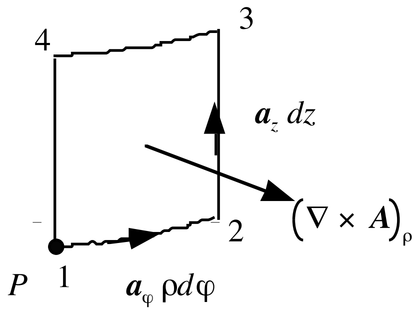
次に, 円筒座標系での表現を見てみよう.



$$\nabla\times\boldsymbol{A} = rot\,\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\boldsymbol{n}}{\Delta S}\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

図5.4　円筒座標における線素と回転の成分

まず, ρ方向の成分$(\nabla\times\boldsymbol{A})_\rho$を調べる．図5.4のようにρ方向の面を構成する線素$d\boldsymbol{l}$は$\boldsymbol{a}_\varphi\,\rho d\varphi$と$\boldsymbol{a}_z\,dz$であり，この面の周回積分は



$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 =$$

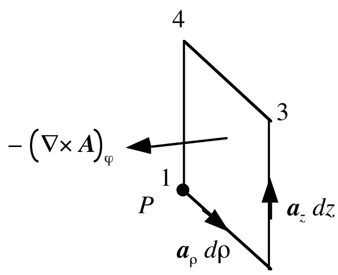
$$A_\varphi\,\rho d\varphi + \quad A_z + \frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi}\rho d\varphi \quad dz - \quad A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}dz \quad \rho d\varphi - A_z\,dz = \quad \frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \quad \rho d\varphi\,dz$$

となる． したがって, ρ方向の成分は

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_\rho = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}_\rho}{\Delta S}\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\left(\frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\rho d\varphi\,dz = \frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

$$\therefore \qquad \nabla\times\boldsymbol{A}\quad_\rho = \frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \tag{5.2.1}$$

同様に, φ方向を向く面に対して，線素は　$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_\rho\,d\rho,\ d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_z\,dz$ であり，周回積分は



$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 =$$

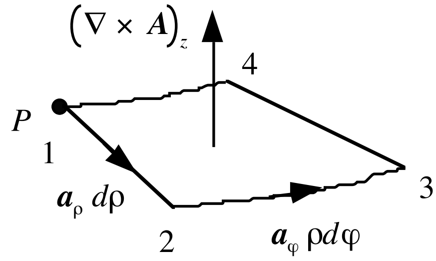
$$= A_\rho\, d\rho + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\, d\rho\right) dz - \left(A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\, dz\right) d\rho - A_z\, dz$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right) d\rho\, dz$$

となる．この場合，線積分を行った閉曲線に対して面ベクトルの方向が$\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{a}_\varphi$（逆向き）方向だから，φ方向の成分は

$$\left(\nabla \times \boldsymbol{A}\right)_\varphi = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}_\varphi}{\Delta S} \oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = -\left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right) \qquad (5.2.2)$$

また, z方向を向く面に対して，$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_\rho\, d\rho$, $d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_\varphi\, \rho d\varphi$を考慮して積分は次式となる．



$$\oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1$$

$$= A_\rho\, d\rho + \left(A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho}\, d\rho\right)(\rho + d\rho)\, d\varphi$$

$$- \left(A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\rho \partial \varphi}\, \rho d\varphi\right) d\rho - A_\varphi\, \rho d\varphi = \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{A_\varphi}{\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\rho d\varphi}\right) \rho\, d\rho\, d\varphi$$

したがって， z 方向の成分は

$$\nabla \times \boldsymbol{A} \quad {}_z = \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{A_\varphi}{\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \quad \rho A_\varphi \quad - \frac{\partial A_\rho}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho} \quad \rho A_\varphi \quad - \frac{\partial A_\rho}{d\varphi}\right] \qquad (5.2.3)$$

となる．

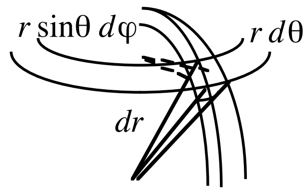
各成分を加え合わせると円筒座標系における回転の表現式は次のようになる．

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\rho \quad \frac{\partial A_z}{\rho \partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \quad + \boldsymbol{a}_\varphi \quad \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \quad + \boldsymbol{a}_z \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho} \quad \rho A_\varphi \quad - \frac{\partial A_\rho}{d\varphi}\right]} \qquad (5.2.4)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_\rho & \rho\, \boldsymbol{a}_\varphi & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho\, A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \qquad (5.2.5)$$

5.3 球座標系による表現

最後に, 球座標系での表現を調べる．r方向の面を構成する線素は$\boldsymbol{a}_\varphi\, r\sin\theta\, d\varphi$と$\boldsymbol{a}_\theta\, r\, d\theta$である．周回積分は内積を考慮して



$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \quad =$$

$$A_\theta\, rd\theta + \left(A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{r\partial\theta} rd\theta \right) r\sin(\theta + d\theta)\, d\varphi - \left(A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{r\sin\theta\,\partial\varphi} r\sin\theta\, d\varphi \right) rd\theta - \left(A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{r\sin\theta\,\partial\varphi} r\sin\theta\, d\varphi \right) r\sin\theta\, d\varphi \tag{5.3.1}$$

$\theta >> d\theta$　より　　$\sin(\theta + d\theta) = \sin\theta\, cos d\theta + \cos\theta\, sin d\theta \approx \sin\theta + \cos\theta\, d\theta$

$$\therefore\quad r\sin(\theta + d\theta)\, d\varphi = r\sin\theta\, d\varphi + r\cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

A_θに関してまとめると　　$-\dfrac{\partial A_\theta}{r\sin\theta\,\partial\varphi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

A_φに関しては

$$A_\varphi\, r\cos\theta\, d\theta\, d\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{r\partial\theta} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi + O(d\theta)^2 - O(d\varphi)^2 = \left(\frac{\cos\theta\, A_\varphi}{r\sin\theta} + \frac{\partial A_\varphi}{r\partial\theta} \right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi + O(d\theta)^2 - O(d\varphi)^2$$

ここで$O(d\theta)^2$などの項は，2次以上の高次項で，極限をとった際に消滅するものである．また,

$$\frac{\cos\theta\, A_\varphi}{r\sin\theta} + \frac{\partial A_\varphi}{r\,\partial\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\cos\theta\, A_\varphi + \sin\theta\, \frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} \right) = \frac{1}{r\sin\theta}\, \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\varphi \right)$$

となるから, $dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ を考慮して

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\varphi \right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right] dS$$

となる．したがって, 半径方向の成分は

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\ {}_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ \sin\theta\, A_\varphi\ - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right] \tag{5.3.2}$$

同様に, 円周φ方向（経度方向）を向く面に対してその周囲の線積分は,

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \;=\; A_\theta\, r d\theta + \left(A_r + \frac{\partial A_r}{r\,\partial\theta}\, r d\theta \right) dr - \left(A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial r}\, dr \right)(\, r + dr\,)\, d\theta$$

$$- \left(A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r}\, dr \right) dr \quad = \frac{\partial A_r}{r\,\partial\theta}\, r d\theta dr - \frac{\partial A_\theta}{\partial r}\, r d\theta dr - A_\theta\, d\theta dr + O(\bullet)^2 \tag{5.3.3}$$

となる．$dS = rd\theta dr$であるが，逆向きの面ベクトルをとっているので，内積では-1がでてくる．これをまとめると

$$\left(\frac{A_\theta}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{r\,\partial\theta} \right) dS + O(\bullet)^2 = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\big(r\, A_\theta\big) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right] dS + O(\bullet)^2$$

したがって,φ方向の成分は次式となる．

$$(\,\nabla\times\boldsymbol{A}\,)_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\big(\, r\, A_\theta\,\big) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right] \tag{5.3.4}$$

また,θ方向（北極から測った緯度方向）を向く面に対しては

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \;=$$

$$A_r\, dr + \left(A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\, dr \right)(r{+}dr)\,\sin\theta\, d\varphi - \left(A_r + \frac{\partial A_r}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\, r\sin\theta\, d\varphi \right) dr$$

$$- \left(A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\, r\sin\theta\, d\varphi \right) r\sin\theta\, d\varphi$$

$$= \left(\frac{A_\varphi}{r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{r\sin\theta\,\partial\varphi} \right) r\, dr\sin\theta\, d\varphi + O(\bullet)^2 \tag{5.3.5}$$

$dS = r\, dr\sin\theta\, d\varphi$であるが，逆向きの面ベクトルをとっているので，内積では-1がでてくる．これより θ 方向の成分は次式となる．

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\quad_\theta = \frac{\partial A_r}{r\sin\theta\,\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{r} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\quad r\sin\theta\, A_\varphi \right] \tag{5.3.6}$$

各成分を加え合わせると球座標系における回転の表現式は次のようになる．

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] + \boldsymbol{a}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\, A_\varphi\right)\right] \\ + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, A_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\end{aligned}} \qquad (5.3.7)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_r & r\,\boldsymbol{a}_\theta & r\sin\theta\,\boldsymbol{a}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & r\,A_\theta & r\sin\theta\,A_\varphi \end{vmatrix} \qquad (5.3.8)$$

以上で各座標系における表現が導出できた．一旦，自分で公式を導き出してみれば，どうしてそのような形になるのか理解できるし，回転の考え方も十分理解できると思われる．そのために，一旦は必ず自分の手で導いてみることが必要である．その後は，覚えておくことは難しいので，具体的な式が必要になった場合，公式を参照しても良いのではなかろうか．

Problems

5.1 Can you explain how to define the rotation of a vector function ?

5.2 Can you explain the physical meaning of the rotation of a vector function ?

5.3 If $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{a}_x + y\,\boldsymbol{a}_y + z\,\boldsymbol{a}_z$ is the position vector, find $\nabla\times\boldsymbol{r}$.

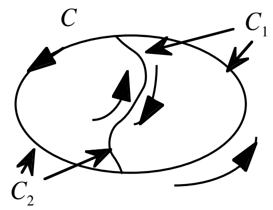
5.4 If $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{g}$ are two vector functions, show that $\nabla\times(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}) = \nabla\times\boldsymbol{f} + \nabla\times\boldsymbol{g}$

5.5 If ϕ is a scalar function with continous second partial derivatives, then show the rotation of the gradient ϕ is the zero vector. $\nabla\times\nabla\phi = 0$

5.6 Show that the divergence of the rotation of a vector $\boldsymbol{f}$ is zero. $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{f} = 0$

5.4 ストークスの定理(Stokes’sTheorem)

ベクトル場$\boldsymbol{A}$において，ある閉曲線（ループ）Cについての周回積分を考えよう．

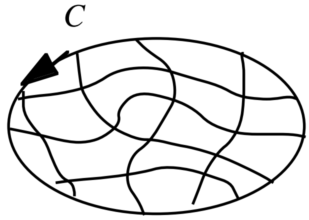


このループを２つのループに分割する．共有する辺の積分は互いに向きが逆となる．線積分の和をとると，共有する線積分は互いに打ち消し合って０となり，結局，ループ外側の周回積分になる．

数式で書くと

$$\oint_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \oint_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

が成り立つ．



さらにこのような分割を繰り返し，ループCを微小なループΔC_i ($i = 1, 2, \cdots, n$)，面積ΔSにすき間無く分割していく．２分割の場合と同様に，隣り合う微小ループは必ず互いの辺を共有している．その共有している辺の線積分の向きは逆なので，積分を合計すると共有部分は打ち消し合い，一番外側の周回積分のみが残る．分割を無限に細かくした極限でも成り立つので，次の式が成立する．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \oint_{\Delta C_i} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

一方，各微小ループについて回転の定義から　$\oint_{\Delta C_i} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i$

が成り立ち，また，面積分の定義から，　$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i = \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$

なので，これらより，　$\boxed{\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}$

が成り立つ．これをストークス(Stokes Theorem)の定理という．また，ベクトルの面積積分と線積分を相互に変換する公式としても知られている．