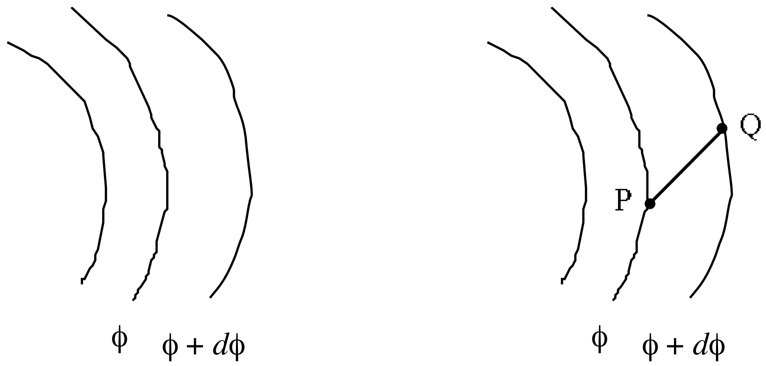
3章　勾配，傾き，gradient

　さて，ϕを位置のスカラー関数としよう．３次元空間では，例えば大気中の温度や気圧などがスカラー関数に該当する．２次元空間では，例えば地図に描かれた標高が該当する．位置ｘ，ｙの全ての値についてその標高値をプロットすれば，その高さがこのスカラー関数の値となる．この関数が一定値の場所をたどっていくと，図3.1に示すような等高線分布が得られる．



各線上ではスカラー関数が同じ値をとる．

図3.1　スカラー関数の2次元分布

　増分$d\phi$はどのように数式で表せるであろうか？

ϕ は位置の関数であるから，ϕ の線上に点 $P\ x, y, z$ を，$\phi + d\phi$ の線上に点 $Q\ x + dx, y + dy, z + dz$ をとったとする（右図）．このとき，増分$d\phi$は

$$d\phi = \phi\ Q\ - \phi\ P \tag{3.1}$$

となる．直角座標系を使うと x, y, z 方向の微分係数とその移動距離 $dx,\ dy,\ dz$ を使って次のように書くことができる．

$$\boxed{d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz} \tag{3.2}$$

注：関数の展開　$f(x + \Delta x) = f(x) + df(x) \approx f(x) + \frac{df}{dx}\Delta x \quad (\Delta x << x)$

により増分は　$df(x) \approx \frac{df}{dx}\Delta x$　で近似できる．

もし，$f = f(x, y, z)$なら，ｘｙｚ方向の成分がでてくる．

$$f(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z\,) \approx f(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

その結果，増分は　$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\Delta z$　のように表される．

(3.2)の $d\phi$ は $\phi = \phi\,(\,x, y, z\,)$ の全微分形式に他ならない．各方向の増加分の和である．この式を直角座標系の線素を用いて，内積の形に書き換えてみる．

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$$

$$= \left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot \left(\boldsymbol{a}_x\, dx + \boldsymbol{a}_y\, dy + \boldsymbol{a}_z\, dz \right) \tag{3.3}$$

したがって，ベクトル内積の形で書くことができる．

$$\boxed{d\phi = \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{l}} \tag{3.4}$$

ここで，　$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_x\, dx + \boldsymbol{a}_y\, dy + \boldsymbol{a}_z\, dz$　　$\nabla\phi = \boldsymbol{a}_x \dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \dfrac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \dfrac{\partial \phi}{\partial z}$

とおいてある．$\nabla\phi$は何を意味するであろうか？その意味を理解するために，図3.2を利用しよう．点Ｐから点Ｑに向かう微小ベクトルが$d\boldsymbol{l}$である．線素$d\boldsymbol{l}$は任意の向きに選ぶことができる．

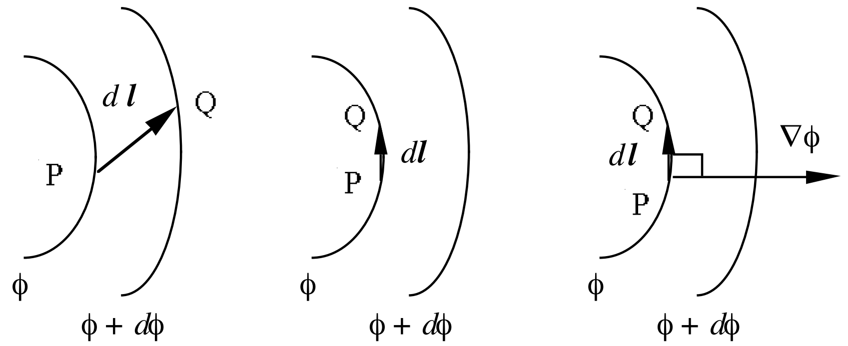


図3.2　スカラー関数の2次元分布と$\nabla\phi$の意味

点Ｑを点Ｐのある等高線上に置いたとする．中図参照．この場合，同じ等高線の上なので，ϕの変化は無い．したがって，式の上からは

$$d\phi = 0 = \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{l}$$

が成り立つ．この式は2つのベクトルが直交することを意味している．$d\boldsymbol{l}$は$\phi = const.$の線に沿っているから，$\nabla\phi$はそれに垂直でなければならない．すなわち，$\phi = const.$に直交す

るベクトルであることが分かる．山にたとえれば，高さ分布がϕで，最大傾斜線方向が$\nabla\phi$となる．傾斜線の傾きは場所によって異なるので，$\nabla\phi$も場所によって変化する．

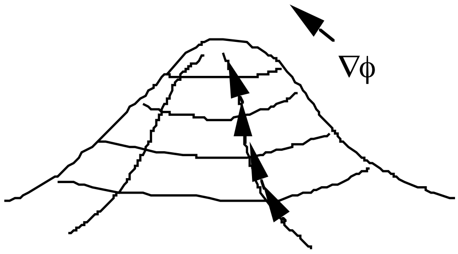


図3.3　高さϕと最大傾斜方向 $\nabla\phi$

この例によって，$\nabla\phi$は最大傾斜方向を向くベクトルであることがわかる．その方向は$d\phi$の増加する方向を正としている．その意味で，

$$\boxed{\nabla\phi = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}} \tag{3.5}$$

のことをϕの勾配，傾き，あるいはgradientと言う．読み方としてはグラジェント・ファイ，あるいはファイの傾き，勾配ともいう．また，ベクトルの微分演算子

$$\boxed{\nabla = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}} \tag{3.6}$$

を日本では主にナブラ演算子あるいは単にナブラ(nabla)，アメリカではデルオペレータ(del operator) と呼んでいる．ナブラ(nabla)はヘブライ語の竪琴という意味から由来している．

円筒座標系でも，線素を使って全微分の形式を書けば，すぐに円筒座標系における$\nabla\phi$の表現を見いだすことができる．

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} d\rho + \frac{\partial\phi}{\rho\partial\varphi} \rho d\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz$$

$$= \left(\boldsymbol{a}_\rho \frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{\partial\phi}{\rho\,\partial\varphi} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \cdot \left(\boldsymbol{a}_\rho\, d\rho + \boldsymbol{a}_\varphi\, \rho\, d\varphi + \boldsymbol{a}_z\, dz \right)$$

$$= \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\therefore \quad \boxed{\nabla\phi = \boldsymbol{a}_\rho \frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{\partial\phi}{\rho\,\partial\varphi} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}} \tag{3.7}$$

球座標でも同様である．

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\,dr + \frac{\partial\phi}{r\,\partial\theta}\,r\,d\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,r\sin\theta\,d\varphi$$

$$= \left(\boldsymbol{a}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\theta \frac{\partial\phi}{r\,\partial\theta} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right) \cdot \left(\boldsymbol{a}_r\,dr + \boldsymbol{a}_\theta\,r\,d\theta + \boldsymbol{a}_\varphi\,r\sin\theta\,d\varphi \right)$$

$$= \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\nabla\phi = \boldsymbol{a}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\theta \frac{\partial\phi}{r\,\partial\theta} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}} \qquad (3.8)$$

注意すべき点は，スカラー関数に∇を作用させるとベクトルになることである．そして，$\nabla\phi$ は各点で定義されるベクトルで，最大傾斜線の方向を持ってはいるが，最大傾斜線の軌跡では無いことである．

ベクトルとしての大きさは，それぞれ次式で与えられる．

直角座標 $$\left|\nabla\phi\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2} \qquad (3.9)$$

円筒座標 $$\left|\nabla\phi\right| = \sqrt{{\frac{\partial\phi}{\partial\rho}}^2 + {\frac{\partial\phi}{\rho\,\partial\varphi}}^2 + {\frac{\partial\phi}{\partial z}}^2} \qquad (3.10)$$

球座標 $$\left|\nabla\phi\right| = \sqrt{{\frac{\partial\phi}{\partial r}}^2 + {\frac{\partial\phi}{r\,\partial\theta}}^2 + {\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}}^2} \qquad (3.11)$$

例題1　$\phi = x^3y^2z$のとき，$\nabla\phi$を求めなさい．

解　$$\nabla\phi = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial(x^3y^2z)}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial(x^3y^2z)}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial(x^3y^2z)}{\partial z} = 3x^2y^2z\,\boldsymbol{a}_x + 2x^3yz\,\boldsymbol{a}_y + x^3y^2\,\boldsymbol{a}_z$$

例題2　$\phi = \frac{1}{r}$のとき，$-\nabla\phi$を求めなさい．

ただし，$\boldsymbol{r} = |\,\boldsymbol{r}\,|\boldsymbol{a}_r = x\,\boldsymbol{a}_x + y\,\boldsymbol{a}_y + z\,\boldsymbol{a}_z$, $r = |\,\boldsymbol{r}\,| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$とする．

解　球座標系を使って

$$\nabla\ \frac{1}{r} = \boldsymbol{a}_r \frac{\partial}{\partial r}\ \frac{1}{r} + \boldsymbol{a}_\theta \frac{\partial}{r\,\partial\theta}\ \frac{1}{r} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{a}_r \qquad \therefore \quad -\nabla\phi = \frac{1}{r^2}\boldsymbol{a}_r$$

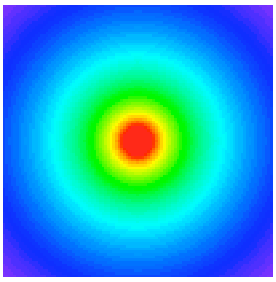
もし，直角座標系を使うと，(3.5)のように，$\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$，$\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$，$\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$を求めておかなければならない．$\phi=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ を用いて計算すると

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{-x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{-y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{-z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

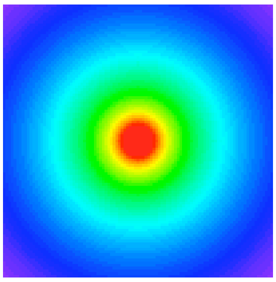
合成して
$$\nabla\phi=\frac{-x\,\boldsymbol{a}_x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{-y\,\boldsymbol{a}_y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{-z\,\boldsymbol{a}_x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-\boldsymbol{r}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\boldsymbol{a}_r}{r^2}$$

$$\therefore\qquad -\nabla\phi=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{a}_r$$

となり，全く同一の結果が得られる．しかし，どちらが簡単に求められるかは一目瞭然であろう．各座標系での$\nabla\phi$の表現を導いたのはこのためである．座標の変数に一致した座標系を選ぶと，問題はかなり単純になる．そのため，どの座標系を選んだらよいか見極める目を持つことが肝要である．



$\phi=\dfrac{1}{r}$



$-\nabla\phi=\dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{a}_r$

問題

3.1　$\nabla\phi$はどのように定義されるか？

3.2　$\nabla\phi$のもつ物理的な意味は何か？

3.3　$\nabla\phi$はスカラーか？ベクトルか？

3.4　直角座標系での$\nabla\phi$の表現式を導きなさい．

3.5　円筒座標系での$\nabla\phi$の表現式を導きなさい．

3.6　球座標系での$\nabla\phi$の表現式を導きなさい．

3.7　Find the gradient of $\phi=x\,y\,z$

3.8　Find the gradient of $\phi=c\ (const.)$