6章　ラプラシアン，ベクトル公式，定理

6.1 ラプラシアン　Laplacian

$\nabla\phi$ はベクトル量である．そこでさらに発散をとると，$\nabla\cdot\nabla\phi$ はどういう形になるであろうか？

$$\nabla\cdot\nabla\phi = \left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\therefore \quad \nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \nabla^2\phi$$

したがって，２階の偏微分演算となる．直角座標系の場合，$\nabla\cdot\nabla = \nabla^2$となり，内積の形をした演算子になる．$\nabla^2$を**ラプラシアン演算子**と呼んでいる．$\nabla^2$単独では意味を持たず，関数に作用させて初めて意味を持つため，演算子という言葉が使われている．

$$\nabla^2\phi = 0$$

を**ラプラス(Laplace)の方程式**という．

各座標系のラプラシアン演算子を掲げる．ポテンシャルを求める問題で出てくる．

- 直角座標　$\boxed{\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}}$

- 円筒座標　発散　$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right) + \dfrac{\partial A_\varphi}{\rho\partial\varphi} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

  において　$\boldsymbol{A} = \nabla\phi = \boldsymbol{a}_\rho \dfrac{\partial\phi}{\partial\rho} + \boldsymbol{a}_\varphi \dfrac{\partial\phi}{\rho\,\partial\varphi} + \boldsymbol{a}_z \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = \boldsymbol{a}_\rho A_\rho + \boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi + \boldsymbol{a}_z A_z$

  とおいて$\boldsymbol{A}$の成分に対応させると∇^2が導出できる．

$$\nabla\cdot\nabla\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\ \rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\ + \frac{\partial}{\rho\partial\varphi}\ \frac{\partial\phi}{\rho\,\partial\varphi}\ + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

  したがって　$\boxed{\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}}$

- 球座標

発散 $$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(A_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

において $\boldsymbol{A}=\nabla\phi=\boldsymbol{a}_r\dfrac{\partial\phi}{\partial r}+\boldsymbol{a}_\theta\dfrac{\partial\phi}{r\,\partial\theta}+\boldsymbol{a}_\varphi\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi}=\boldsymbol{a}_r\,A_r+\boldsymbol{a}_\theta\,A_\theta+\boldsymbol{a}_\varphi\,A_\varphi$

に対応させて

$$\nabla\cdot\nabla\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\dfrac{\partial\phi}{r\,\partial\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi}$$

したがって $$\boxed{\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}}$$

ベクトルに作用するラプラシアン∇^2は直角座標においてのみ，$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$が成立する．一般の直交曲線座標ではベクトルラプラシアンは$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla-\nabla\times\nabla\times$で定義される．

6.2　ベクトル公式

ついでにベクトル演算子に関連する公式を掲げておこう．以下の公式はどの座標系でも成立する重要なベクトル公式である．ここでは直角座標系における確認を示しておく．

$\boxed{\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\equiv0}$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\times\boldsymbol{A})_x+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\times\boldsymbol{A})_y+\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\times\boldsymbol{A})_z$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2A_x}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2A_x}{\partial z\,\partial y}+\frac{\partial^2A_y}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2A_y}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2A_z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2A_z}{\partial y\,\partial x}=0$$

この公式は，渦巻きの軸方向のベクトル自身は閉じていることを意味している．竜巻の中心を流れる上昇気流を考えると良いが，気流が下から上に上がり，それが上で広がってやがて竜巻の外側を通って下方におりてくる．そしてまた吸いあがる．上昇気流を渦巻きの軸方向のベクトルに対応させることができるが，その気流自身は閉じている．

$\boxed{\nabla\times\nabla\phi\equiv\mathbf{0}}$

$$\nabla\times\nabla\phi=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\boldsymbol{a}_y\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_z\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\mathbf{0}$$

この公式は傾きのベクトルには渦巻き成分がないことを意味している．山の最大傾斜線を傾きベクトルに対応させて考えると，山の頂上を中心として四方八方に広がっていることが想像できる．その広がっていく中には渦の成分がないことが理解できるであろう．

$\boxed{\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}}$

これは波動方程式を導く際に，よくでてくる公式である．

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x\quad\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\quad+\boldsymbol{a}_y\quad\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\quad+\boldsymbol{a}_z\quad\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$$

だから，

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x\quad\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\quad+\boldsymbol{a}_y\quad\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_z}{\partial z}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}$$

$$+\boldsymbol{a}_z\quad\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}$$

$$=\boldsymbol{a}_x\quad\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\quad+\boldsymbol{a}_y\quad\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right]$$

$$+\boldsymbol{a}_z\quad\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} & \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} & \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$\boxed{\nabla\,(\phi\psi) = (\nabla\phi)\,\psi + \phi\,(\nabla\psi)}$

$$\nabla\,(\phi\psi) = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\psi\right) + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi\psi\right) + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi\psi\right)$$

$$= \boldsymbol{a}_x\,\psi\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\,\psi\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\,\psi\,\frac{\partial\phi}{\partial z} + \boldsymbol{a}_x\,\phi\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\,\phi\,\frac{\partial\psi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\,\phi\,\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$= (\nabla\phi)\,\psi + \phi\,(\nabla\psi)$$

$\boxed{\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}}$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = \frac{\partial(\phi A_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi A_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi A_z)}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_z + \phi\quad \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

$\boxed{\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\,\nabla\times\boldsymbol{A} + (\nabla\phi)\times\boldsymbol{A}}$

$$\nabla\times\quad\phi\,\boldsymbol{A}\quad = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_x & \phi A_y & \phi A_z \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{a}_x\quad \frac{\partial\ \phi A_z}{\partial y} - \frac{\partial\ \phi A_y}{\partial z}\quad + \boldsymbol{a}_y\quad \frac{\partial\ \phi A_x}{\partial z} - \frac{\partial\ \phi A_z}{\partial x}\quad + \boldsymbol{a}_z\quad \frac{\partial\ \phi A_y}{\partial x} - \frac{\partial\ \phi A_x}{\partial y}$$

$$= \boldsymbol{a}_x\,\phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_x\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\,A_z-\frac{\partial \phi}{\partial z}\,A_y\right)$$

$$+\boldsymbol{a}_y\,\phi\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{a}_y\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\,A_x-\frac{\partial \phi}{\partial x}\,A_z\right)$$

$$+\boldsymbol{a}_z\,\phi\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)+\boldsymbol{a}_z\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\,A_y-\frac{\partial \phi}{\partial y}\,A_x\right)$$

$$=\phi\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\phi\,\nabla\times\boldsymbol{A}+(\nabla\phi)\times\boldsymbol{A}$$

$\boxed{\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})}$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left\{\boldsymbol{a}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\boldsymbol{a}_y(A_zB_x-A_xB_z)+\boldsymbol{a}_z(A_xB_y-A_yB_x)\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z-A_zB_y)+\frac{\partial}{\partial y}(A_zB_x-A_xB_z)+\frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y-A_yB_x)$$

$$=B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$-A_x\quad\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\quad-A_y\quad\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\quad-A_z\quad\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}$$

$$=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$\boxed{\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}}$

$$\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})=\quad\boldsymbol{a}_x\,A_x+\boldsymbol{a}_y\,A_y+\boldsymbol{a}_z\,A_z\qquad\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\quad\boldsymbol{a}_x\,B_x+\boldsymbol{a}_y\,B_y+\boldsymbol{a}_z\,B_z\qquad\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}=\quad B_x\frac{\partial}{\partial x}+B_y\frac{\partial}{\partial y}+B_z\frac{\partial}{\partial z}\qquad\boldsymbol{a}_x\,A_x+\boldsymbol{a}_y\,A_y+\boldsymbol{a}_z\,A_z$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=\quad A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\qquad\boldsymbol{a}_x\,B_x+\boldsymbol{a}_y\,B_y+\boldsymbol{a}_z\,B_z$$

x 成分についてみると，右辺は

$$= A_x \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) - B_x \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(A_x B_y - A_y B_x\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z B_x - A_x B_z\right) \quad = \quad \text{左辺の x 成分}$$

他の成分についても同様

$$\therefore \quad \nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

$$\boxed{\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})}$$

x 成分についてみると，左辺は

$$\left[\ \nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\ \right]_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right) = \frac{\partial\left(A_x B_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(A_y B_y\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(A_z B_z\right)}{\partial x}$$

右辺は

$$\left[\ (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\ \right]_x = A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$\left[\ (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\ \right]_x = B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$\left[\ \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})\ \right]_x = A_y \left[\ \nabla\times\boldsymbol{B}\ \right]_z - A_z \left[\ \nabla\times\boldsymbol{B}\ \right]_y = A_y \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad - A_z \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\left[\ \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\ \right]_x = B_y \left[\ \nabla\times\boldsymbol{A}\ \right]_z - B_z \left[\ \nabla\times\boldsymbol{A}\ \right]_y = B_y \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad - B_z \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\left[\ (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\ \right]_x + \left[\ \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})\ \right]_x = A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial x}$$

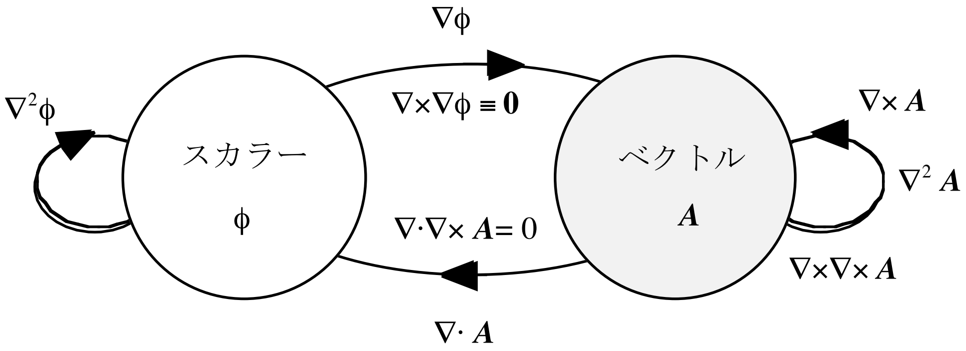
$$\left[\ (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\ \right]_x + \left[\ \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\ \right]_x = B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\left[\ (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\ \right]_x + \left[\ \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})\ \right]_x + \left[\ (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\ \right]_x + \left[\ \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\ \right]_x = \frac{\partial\ A_x B_x}{\partial x} + \frac{\partial\ A_y B_y}{\partial x} + \frac{\partial\ A_z B_z}{\partial x}$$

他の成分についても同様

$$\therefore \quad \nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

演算子を施した結果には次のような関係がある.



6.3　グリーンの定理(Green's Theorem)

　ベクトル公式　　$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

の中に,　　$\boldsymbol{A} = \nabla\psi$

を代入して展開すると　　$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\,\nabla\cdot\nabla\psi = \nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\,\nabla^2\psi$

ガウスの定理より,

$$\boxed{\int_V \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\,dv = \oint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \left(\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\,\nabla^2\psi\right)dv}$$

これを**グリーンの第一公式**という.

　また,

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\,\nabla^2\psi$$

$$\nabla\cdot(\psi\nabla\phi) = \nabla\phi\cdot\nabla\psi + \psi\,\nabla^2\phi$$

両式を引き算して,　　$\nabla\cdot(\,\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\,) = \phi\,\nabla^2\psi - \psi\,\nabla^2\phi$

これにガウスの定理を適用すると

$$\boxed{\oint_S (\,\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\,)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \left(\phi\,\nabla^2\psi - \psi\,\nabla^2\phi\right)dv}$$

これを**グリーンの第二公式**という.

さて，ベクトル界を分類するときに，次の重要な定理がある．

まず，ベクトル界$\boldsymbol{U}$が，$\nabla\cdot\boldsymbol{U}=0$，$\nabla\times\boldsymbol{U}\neq\boldsymbol{0}$を満たすときに，そのベクトル界$\boldsymbol{U}$は回転ベクトル界と呼ばれる．

また，ベクトル界$\boldsymbol{V}$が$\nabla\cdot\boldsymbol{V}\neq 0$，$\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$を満たすときに，そのベクトル界$\boldsymbol{V}$は非回転ベクトル界と呼ばれる．

6.4　ヘルムホルツの定理(Helmholtz's Theorem)：ベクトル界の分解定理

任意のベクトル界$\boldsymbol{F}$はその定義された領域V（表面をS）で，回転ベクトル$\boldsymbol{U}$と非回転ベクトル$\boldsymbol{V}$の二つのベクトル界の和として表される．

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}$$

このとき，$\boldsymbol{U}$と$\boldsymbol{V}$はそれぞれ，　$\boldsymbol{U}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，　$\boldsymbol{V}=-\nabla\phi$

のようにベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$とスカラポテンシャルϕで表され，

$$\boldsymbol{A}(r)=\int_V G_0\,\nabla\times\boldsymbol{F}(r')\,dv'-\int_S G_0\boldsymbol{F}(r')\times d\boldsymbol{S}'$$

$$\phi(r)=\int_V G_0\,\nabla\cdot\boldsymbol{F}(r')\,dv'+\int_S G_0\boldsymbol{F}(r')\cdot d\boldsymbol{S}'$$

で与えられる．$d\boldsymbol{S}'$はVの内側に向かう面素ベクトルである．

6.5　ベクトル演習問題

以下を適当な座標系で証明せよ。

6.1　$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$

6.2　$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \boldsymbol{C}$

6.3　$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A}) = (\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{A} + \phi \nabla \cdot \boldsymbol{A}$

6.4　$\nabla \times \nabla \phi \equiv \boldsymbol{0}$

6.5　$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$

6.6　$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \equiv 0$

6.7　ベクトルが次のように定義されている。　$\boldsymbol{A} = \left(\cos \alpha x \, \boldsymbol{a}_x + \sin \alpha x \, \boldsymbol{a}_y \right) \exp (- \gamma z)$

6.7.1　$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$　を求めよ。

6.7.2　$\nabla \times \boldsymbol{A}$　を求めよ。

6.7.3　$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$　を確かめよ。

6.7.4　$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \, dv$　を適当な表面Sで囲まれた体積Vに対して確かめよ。

6.7.5　$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$　を適当な閉路cで囲まれた面積Sに対して確かめよ。

6.7　ベクトル　$\boldsymbol{A} = \begin{cases} \boldsymbol{r} & (r < a) \\ -a^3 \nabla (\frac{1}{r}) & (r > a) \end{cases}$

はスカラーポテンシャルφを持つことを示し、それを求めよ。

6.8　閉曲面Sで囲まれた領域V内で$\boldsymbol{A} = \nabla \phi$, $\nabla^2 \phi = 0$ならば，次式が成立することを証明せよ。

$$\int_V \boldsymbol{A}^2 dv = \oint_S \phi \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, dS$$

6.6　ベクトル公式一覧表

ベクトル演算

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

演算子

$$\nabla(\phi+\psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$$

$$\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\,\psi + \phi\,(\nabla\psi)$$

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{(\nabla\phi)\,\psi - \phi\,(\nabla\psi)}{\psi^2}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla\cdot\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\cdot\nabla = \nabla^2$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\times\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times\nabla\phi \equiv \boldsymbol{0}$$

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\,\nabla\times\boldsymbol{A} + (\nabla\phi)\times\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) \equiv 0$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

ガウスの定理

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dv$$

ストークスの定理

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

グリーンの定理

$$\oint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \left(\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\,\nabla^2\psi\right) dv$$

$$\oint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \left(\phi\,\nabla^2\psi - \psi\,\nabla^2\phi\right) dv$$

直角座標系における表現

$$\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{a}_x + A_y\,\boldsymbol{a}_y + A_z\,\boldsymbol{a}_z \qquad \nabla\phi = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

円筒座標系における表現

$$\boldsymbol{A} = A_\rho\,\boldsymbol{a}_\rho + A_\varphi\,\boldsymbol{a}_\varphi + A_z\,\boldsymbol{a}_z \qquad \nabla\phi = \boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial\phi}{\rho\,\partial\varphi} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{\partial A_\varphi}{\rho\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\rho\left(\frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \boldsymbol{a}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \boldsymbol{a}_z\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\rho}{d\varphi}\right]$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_\rho & \rho\,\boldsymbol{a}_\varphi & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho\,A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

球座標系における表現

$$\boldsymbol{A} = A_r\,\boldsymbol{a}_r + A_\theta\,\boldsymbol{a}_\theta + A_\varphi\,\boldsymbol{a}_\varphi \qquad \nabla\phi = \boldsymbol{a}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\theta\frac{\partial\phi}{r\,\partial\theta} + \boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\ \ r^2A_r\ \ + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\ \ A_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ \ \sin\theta\,A_\varphi\ \ - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] + \boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\ \ r\sin\theta\,A_\varphi\ \ \right]$$

$$+ \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, A_\theta \right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_r & r\, \boldsymbol{a}_\theta & r \sin\theta\, \boldsymbol{a}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r\, A_\theta & r \sin\theta\, A_\varphi \end{vmatrix}$$