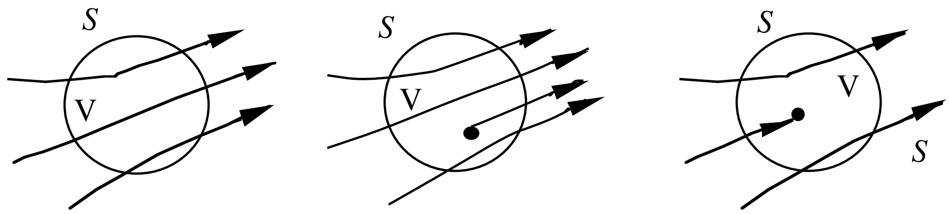
4章　発散

発散は重要なベクトル演算の一つであり，定義は

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}} \tag{4.1}$$

である．Divergence(ダイバージェンス)ともいう．この意味は，微小体積Δvを取り囲む全表面（閉曲面という）上で，外向きのベクトル法線成分をすべて加えあわせ，全体としての量を調べるものである．ベクトル$\boldsymbol{A}$はどのような向きでもかまわないが，面ベクトルとの内積$\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$をとると，面に対する法線成分をだけが取り出される．それを面全体にわたって寄せ集め，全体として出入りする量を調べるものである．体積，あるいは閉曲面を限りなく小さくすると極限値は点となる．したがって，発散は点における出入り（湧き出し，あるいは消失）を表していることになる．



(a) わき出しなし　　(b) わき出しあり　　(c)吸い込みあり

図4.1　流線の中の湧き出し

直観的には，図4.1のようにベクトルに沿う流線を考え，微少体積Δvの流線の出入りを考えると理解しやすい．(a)のように，Δv内にわき出しや吸い込みがなければ，外から入った流線は再び外にでるはずであるから，その表面を貫いて出る流線の数と，入った流線の数は等しいはずである．一方，(b)のようにわき出しがあると，流線がその場所で生成されるので閉曲面を貫いて出る流線の数は増加する．(c)のように領域内部に吸い込みがあれば，その場所で流線が消滅するから，閉曲面Sを貫いて出る流線の数は減少する．このように，正味のわき出し量は，その閉曲面Sを貫く流線の出入りの差によって定義できる．このわき出し量を表したものが発散である．

さて，定義(4.1)にでてくるベクトル面積積分 $\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ のことをベクトル $\boldsymbol{A}$のflux（束）という．$\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$は閉曲面にわたる積分を意味している．この章では，Fluxを用いて発散の表現式を導く．各座標系で考察してみよう．

4.1 直角座標系による表現

図4.2のように直角座標系でサイコロのような微小体積 $\Delta v\ (= \Delta x \Delta y \Delta z)$ を取り，それを取り囲む全表面積（閉曲面）をＳとする．微小体積の中心の座標を(x_0, y_0, z_0)とし，その位置におけるベクトルを

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\left(x_0, y_0, z_0\right) = A_x\left(x_0, y_0, z_0\right)\boldsymbol{a}_x + A_y\left(x_0, y_0, z_0\right)\boldsymbol{a}_y + A_z\left(x_0, y_0, z_0\right)\boldsymbol{a}_z \tag{4.1.1}$$

とおく．この値は既知とする．

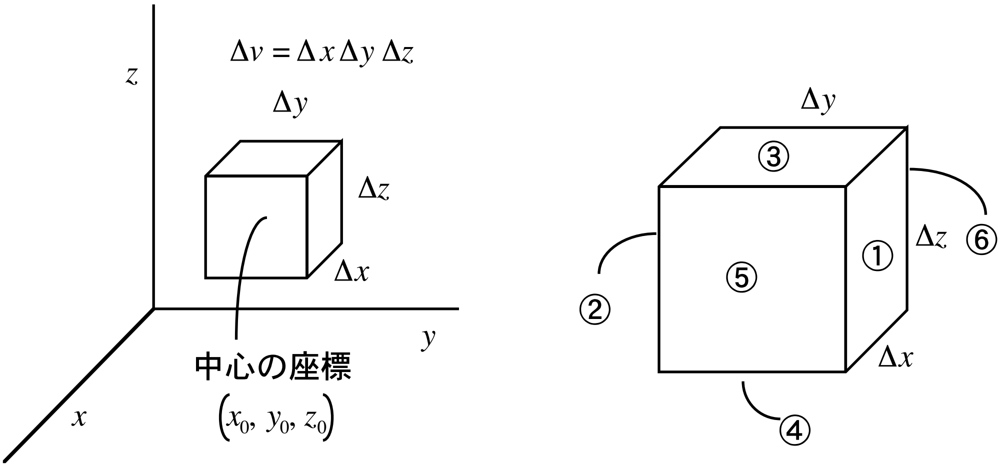


図4.2　直角座標系における微小体積と閉曲面

閉曲面にわたる積分では，右図のように直方体を取り囲む面を①②③④⑤⑥に分け，各面で面積積分を行う．

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_1 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_2 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_3 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_4 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_5 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_6 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.1.2}$$

最初に，y方向を向いている①と②面における面積積分を考えてみる．

①面で面ベクトルは　$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\, dS \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_y\, dS_y = \boldsymbol{a}_y\, \Delta z\, \Delta x$

となるので積分は

$$\int_1 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = A_y\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_y\, dS_y = A_y\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\Delta z\, \Delta x \tag{4.1.3}$$

となる．

ここで注意すべきことは，積分がA_y成分だけから得られるスカラー量になることである．面ベクトル$d\boldsymbol{S}$の中にy方向の単位ベクトル$\boldsymbol{a}_y$が含まれているので，内積演算を行うこ

とによってy方向成分A_yのみがでてくる．他の成分は単位ベクトルの直交性によりすべて0になる．

また，A_yの位置は，中心y_0よりy方向に$+\dfrac{\Delta y}{2}$だけ移動したところにある．x，zに関して位置は同じ．$y_0+\dfrac{\Delta y}{2}$ の位置におけるA_yの値を求めるため，中心座標(x_0, y_0, z_0)を基準にy方向にTaylor展開してみる．

$$A_y\left(x_0, y_0+\frac{\Delta y}{2}, z_0\right) \fallingdotseq A_y\left(x_0, y_0, z_0\right)+\frac{\partial A_y\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial y}\frac{\Delta y}{2} \tag{4.1.4}$$

この展開を使うと，(4.1.3)は次のようになる．

$$\int_1 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\left(A_y+\frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z\,\Delta x \tag{4.1.5}$$

②面では面ベクトルの法線が-y方向を向いているので

$$d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\,dS \quad\Rightarrow\quad -\boldsymbol{a}_y\,dS_y=-\boldsymbol{a}_y\,\Delta z\,\Delta x$$

$\boldsymbol{A}$との内積をとると-1がでてくる．

$$\int_2 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=A_y\left(x_0, y_0-\frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\left(-\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_y\right)dS_y=-A_y\left(x_0, y_0-\frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\Delta z\,\Delta x$$

$A_y\left(x_0, y_0-\dfrac{\Delta y}{2}, z_0\right)$をy方向にTaylor展開し，代入すると

$$\int_2 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=-\left(A_y-\frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z\,\Delta x \tag{4.1.6}$$

③面では，面ベクトルは z 方向を向いている．①面と同様な面積積分を行うと

$$\int_3 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\left(A_z+\frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\,\Delta y \tag{4.1.7}$$

④面では

$$\int_4 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=-\left(A_z-\frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\,\Delta y \tag{4.1.8}$$

⑤面では

$$\int_5 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\left(A_x+\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\,\Delta z \tag{4.1.9}$$

⑥面では

$$\int_6 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=-\left(A_x-\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\,\Delta z \tag{4.1.10}$$

閉曲面にわたる積分は全ての面からの寄与である．それゆえ，(4.1.5)-(4.1.10)を加え合わせると

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \tag{4.1.11}$$

となる．$\Delta v = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ 　のなで，これを小さくすると，直角座標系では発散として次の表現が得られる．

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta v}\oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \tag{4.1.12}$$

この表現式から分かることは，ベクトルの各成分のそれぞれの方向への変化割合の和，すなわち，法線方向の変化割合の和を示しているということである．それがプラスであればベクトルの大きさが増加していると考えることができる．つまり，その微小体積から何らかの原因でベクトル量が湧き出ていることになる．一方，マイナスであれば逆に減少していることになり，ブラックホールのように吸い込んでいると考えられる．したがって，ベクトルの発散を調べることは，ある点でベクトル量の湧き出し（吸い込み）があるかないかを調べることに相当している．もし，発散が０であれば，湧き出し（吸い込み）が無いことになり，はじめから０か，あるいは出ていく量と入ってくる量が等しいことを意味している（図4.1の流線の考え方を参照）．

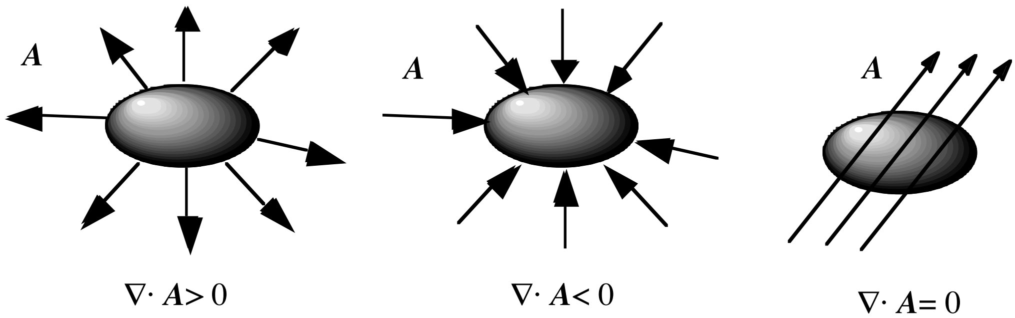


図4.3　発散の意味

ベクトルの発散は，演算の結果，スカラー量になる．演算子をベクトルと考えればその記号表記の意味が理解しやすい．

定義式では座標系を指定していない．そこで，以下に円筒座標系と球座標系についてその表現を見てみよう．

4.2　円筒座標系による表現

円筒座標系で微少体積と面ベクトルは図4.4のようになっている．

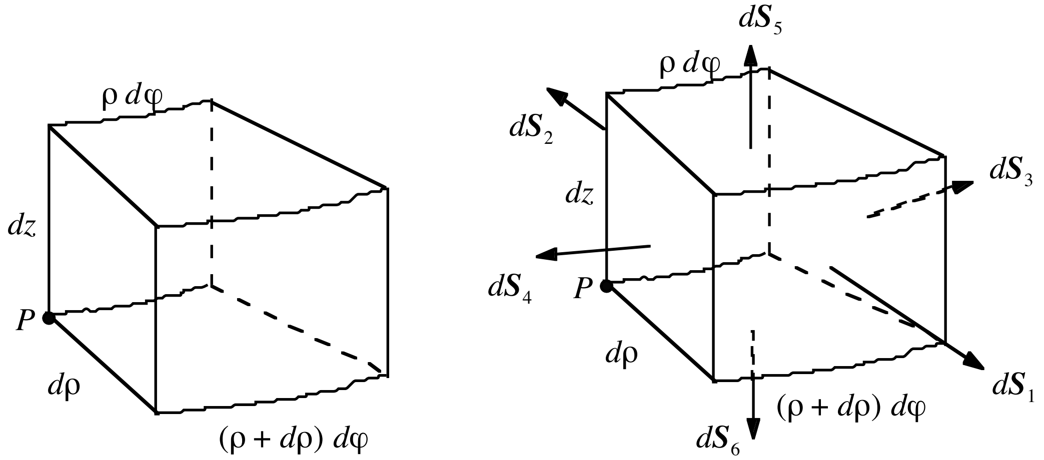


図4.4　円筒座標系における微少体積と面ベクトル

ρ 方向の面積積分を考えてみよう．面ベクトルは

$$d\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{a}_\rho\, dS_{\rho+} = \boldsymbol{a}_\rho\, (\rho + d\rho)\, d\varphi\, dz \quad , \qquad d\boldsymbol{S}_2 = -\,\boldsymbol{a}_\rho\, dS_{\rho-} = -\,\boldsymbol{a}_\rho\, \rho\, d\varphi\, dz \tag{4.2.1}$$

なので，この2面の積分は次のように書くことができる．

$$\int_1 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_1 + \int_2 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_2 = \left(A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} d\rho \right) \left(\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho\right) dS_{\rho+} + A_\rho \left(-\,\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho\right) dS_{\rho-}$$

$$= \left(A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho)\, d\varphi\, dz - A_\rho\, \rho\, d\varphi\, dz$$

$$= \quad \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} \quad d\rho\, \rho d\varphi\, dz + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} (d\rho)^2\, d\varphi\, dz \tag{4.2.2}$$

なお，$(d\rho)^2$の項は，後で極限を取る際に０になる．

φ方向で面ベクトルは　$d\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{a}_\varphi\, dS_{\varphi+} = \boldsymbol{a}_\varphi\, d\rho\, dz$, $d\boldsymbol{S}_4 = -\,\boldsymbol{a}_\varphi\, dS_{\varphi-} = -\,\boldsymbol{a}_\varphi\, d\rho\, dz$ 　(4.2.3)

なので，積分は次のようになる．

$$\int_3 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_3 + \int_4 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_4 = \quad A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} \rho d\varphi \quad (\boldsymbol{a}_\varphi\cdot\boldsymbol{a}_\varphi)\, dS_{\varphi+} + A_\varphi\, (-\,\boldsymbol{a}_\varphi\cdot\boldsymbol{a}_\varphi)\, dS_{\varphi-}$$

$$= \quad A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} \rho d\varphi \quad d\rho\, dz - A_\varphi\, d\rho\, dz = \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} \rho d\varphi\, d\rho\, dz \tag{4.2.4}$$

z方向では　$d\boldsymbol{S}_5 = \boldsymbol{a}_z\, dS_{z+} = \boldsymbol{a}_z\, \rho\, d\varphi\, d\rho,\ d\boldsymbol{S}_6 = -\,\boldsymbol{a}_z\, dS_{z-} = -\,\boldsymbol{a}_z\, \rho\, d\varphi\, d\rho$ 　(4.2.5)

$$\int_5 \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}_5 + \int_6 \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}_6 = \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z}\, dz \right) (\boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_z)\, dS_{z+} + A_z \left(-\boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_z \right) dS_{z-}$$

$$= \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z}\, dz \right) \rho\, d\varphi\, d\rho - A_z\, \rho\, d\varphi\, d\rho = \frac{\partial A_z}{\partial z}\, \rho\, d\varphi\, d\rho dz \quad (4.2.6)$$

これらの寄与を加え合わせて微小体積$\Delta v = d\rho\ \rho d\varphi\ dz$を 0 にした極限では

$$\lim_{\Delta v \to 0} \left[\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} \right) + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \frac{\rho d\varphi\, d\rho\, dz}{\Delta v} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

それゆえ，円筒座標系における発散の表現は次式となる.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho A_\rho \right) + \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho A_\rho \right) + \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \quad (4.2.7)$$

4.3 球座標系による表現

球座標で微少体積と面ベクトルは次のようになる.

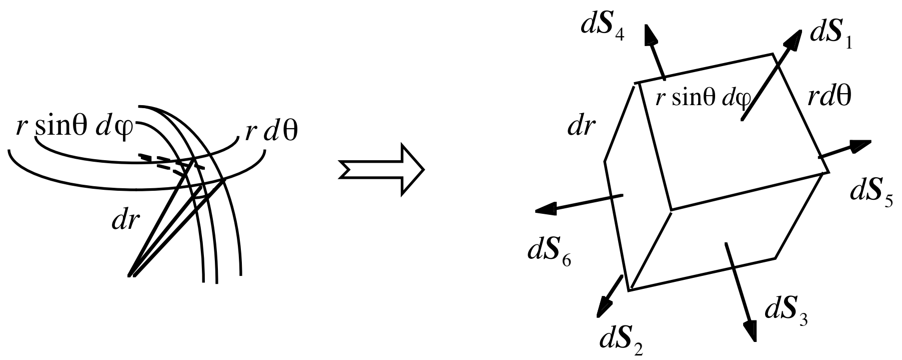


図4.4　球座標系における微少体積と面ベクトル

同様な手順で，半径r方向

$$d\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{a}_r\, dS_{r+} = \boldsymbol{a}_r\, (r + dr) d\theta\, (r + dr) \sin\theta\, d\varphi\ ,\quad d\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{a}_r\, dS_{r-} = -\,\boldsymbol{a}_r\, r d\theta\, r \sin\theta\, d\varphi \quad (4.3.1)$$

$$\int_1 \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}_1 + \int_2 \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}_2 = \left(A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r}\, dr \right) dS_{r+} - A_r\, dS_{r-}$$

$$= \left(\frac{2A_r}{r} + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r^2} dr + \frac{2\partial A_r}{\partial r}\frac{dr}{r} + \frac{\partial A_r}{\partial r}\frac{dr^2}{r^2} \right) r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{4.3.2}$$

緯度θ方向

$$d\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{a}_\theta \, dS_{\theta+} = \boldsymbol{a}_\theta \, dr \, r \sin(\theta + d\theta) \, d\varphi \approx \boldsymbol{a}_\theta \, dr \, r \, (\sin\theta + \cos\theta \, d\theta) \, d\varphi$$

$$d\boldsymbol{S}_4 = \boldsymbol{a}_\theta \, dS_{\theta-} = -\boldsymbol{a}_\theta \, dr \, r \sin\theta \, d\varphi \tag{4.3.3}$$

$$\int_3 \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}_3 + \int_4 \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}_4 = \left(A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{r\partial\theta} r d\theta \right) dS_{\theta+} - A_\theta \, dS_{\theta-} = \left(\frac{A_\theta \cos\theta}{r \sin\theta} + \frac{\partial A_\theta}{r \, \partial\theta} \right) dr \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{4.3.4}$$

経度φ方向　　$d\boldsymbol{S}_5 = \boldsymbol{a}_\varphi \, dS_{\varphi+} = \boldsymbol{a}_\varphi \, r d\theta \, dr$,　$d\boldsymbol{S}_6 = \boldsymbol{a}_\varphi \, dS_{\varphi-} = -\boldsymbol{a}_\varphi \, r d\theta \, dr$　　(4.3.5)

$$\int_5 \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}_5 + \int_6 \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}_6 = \left(A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{r \sin\theta \, \partial\varphi} r \sin\theta \, d\varphi \right) dS_{\varphi+} - A_\varphi \, dS_{\varphi-} = \frac{\partial A_\varphi}{r \sin\theta \, \partial\varphi} dr \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{4.3.6}$$

したがって，これらの寄与を加え合わせて微小体積の極限をとれば

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{2A_r}{r} + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_\theta \cos\theta}{r \sin\theta} + \frac{\partial A_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial A_\varphi}{r \sin\theta \, \partial\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r \right) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

となる．したがって，球座標系における発散の表現は次式となる．

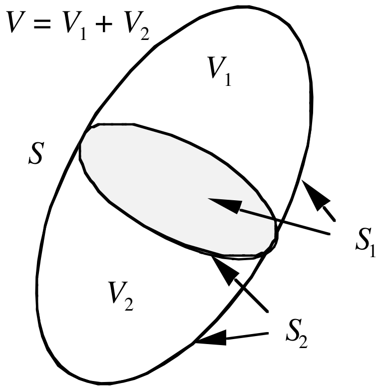
$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r \right) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \left(A_\theta \sin\theta \right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}} \tag{4.3.7}$$

以上のように，各座標系における発散の表現式が得られた．一度は自分で導いてみることが肝要である．一旦，導くことができたら後は公式として使えばよい．

4.4　ガウスの発散定理(Gauss’s Theorem)

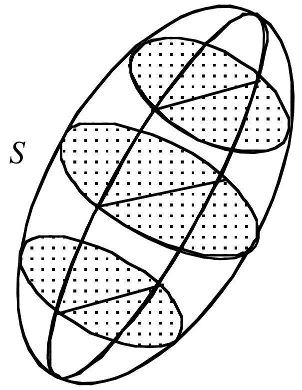
ベクトル場$\boldsymbol{A}$の中にある閉曲面Sでその面を貫いて外に出る全フラックスを考えよう．

$$\Phi = \oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$



閉曲面で囲まれる体積VをV_1, V_2の２つに分割し，その表面Sを貫いて外に出る全フラックスを考える．両者が共有している面については，一方から出たものは他方に入るので，それらは打ち消し合う．閉曲面を貫いて外に出るフラックスを合計したものは，結局，閉曲面を貫いて外に出る全フラックスになる．

数式表現では，
$$\oint_{S_1} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} + \oint_{S_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \Phi$$



が成り立つ．そこで，さらに細かな体積ΔV_i ($i = 1, 2, \cdots, n$)に分割を繰り返し，体積全体を細胞のような微小体積に隙間無く分割していくことを考える．２つに分割した場合と同様に，隣り合う微小体積同士は互いに面を共有している．両者が共有している面については，一方から出たものは他方に入るので，それらは互いに打ち消し合う．その結果，隣り合わない表面Sだけが残る．したがって次の式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \oint_{\Delta S_i} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \Phi$$

一方，各微小体積について，発散の定義から
$$\oint_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \nabla\cdot\boldsymbol{A}\, dV$$

が成り立ち，また，体積積分の定義により，
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \nabla\cdot\boldsymbol{A}\, \Delta V_i = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\, dv$$

であるから，これらにより，
$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\, dv}$$

が成り立つ．これを**ガウスの発散定理**という．この定理は，「閉曲面を貫いて外に出るベクトルのフラックスはその体積内に含まれるわき出し量に等しい」と言うことを意味している．これは，ベクトルの体積積分と面積積分を相互に変換する公式としても知られている．

問題

4.1 Can you derive the divergence formula for the rectangular, circular, and spherical coordinate systems ?

4.2 Find the divergence of $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{a}_x + y\,\boldsymbol{a}_y + z\,\boldsymbol{a}_z$ answer: $\nabla\cdot\boldsymbol{r} = 3$

4.3 Find the divergence of $\boldsymbol{A} = xyz\,\boldsymbol{a}_x + x^2y^2z\,\boldsymbol{a}_y + yz^3\,\boldsymbol{a}_z$

answer: $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = yz + 2x^2yz + 3yz^2$

4.4 If ϕ is a scaler function and A is a vector function, show that

$$\nabla\cdot\left(\phi\boldsymbol{A}\right) = \phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla\phi\cdot\boldsymbol{A}$$

4.5 Calculate $\nabla\cdot\left(r^{n-1}\boldsymbol{r}\right)$

Setting $\phi = r^{n-1}$ in the above problem, we have

$$\nabla\cdot\left(r^{n-1}\boldsymbol{r}\right) = 3\,r^{n-1} + (n-1)\,r^{n-1} = (n+2)\,r^{n-1}$$

If n=-2, we obtain for $r \neq 0$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 0$$

4.6 Can you explain how the divergence of A, denoted by $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$, is defined in integral form ?

4.7 Can you exlain what the flux of A is ?

4.8 Can you explain how the surface integral is defined and evaluated ?

4.9 Can you give the physical interpretation of $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$?