

2章 座標系

場・空間は3次元なので、ベクトルを表現するには少なくとも3成分を指定する必要がある。そのために座標系が必要となる。座標系として最も一般的なものは、 x, y, z 成分を使った直角座標系である。しかし、他にも円柱座標、球座標、だ円座標、放物線座標など様々なものがある。現在までに3成分で変数分離可能な座標系は11個あるといわれている(Moon & Spencer, Field Theory Handbook)。11個の座標系を全て紹介することは、かえって混乱を招き、理解できなくなる恐れがあるので、ここでは3つの座標系（直角座標、円柱座標、球座標）のみに限定する。

3つの座標系を導入することすら、取り扱いを難しくするように思われるが、これは、世の中に存在する物体の形と関連しているためである。現実にある物体の形を見ると、直角座標で表されるもの、線状のもの、球状のものが最も多い。円筒状や球状の曲面を直角座標で表そうとしても、境界がぎざぎざになり、うまく表現できない。いくらコンピュータを使っても事態は同様である。できるだけ形状に沿った表現をしようとすると、最低でも直角座標、円柱座標、球座標が必要になるのである。

直交座標系 (Orthogonal coordinate system) とは、単位ベクトルが直交している座標系の総称である。したがって、直角座標系も直交座標系に含まれている。直交座標系では、直交する単位ベクトルの組で座標のフレームを作る。どの座標系でも単位ベクトルの組が右ネジの法則に従う右手系となっている。

2-1 直角座標系（デカルト座標）

(Rectangular coordinate system, Cartesian coordinate systemともいう)

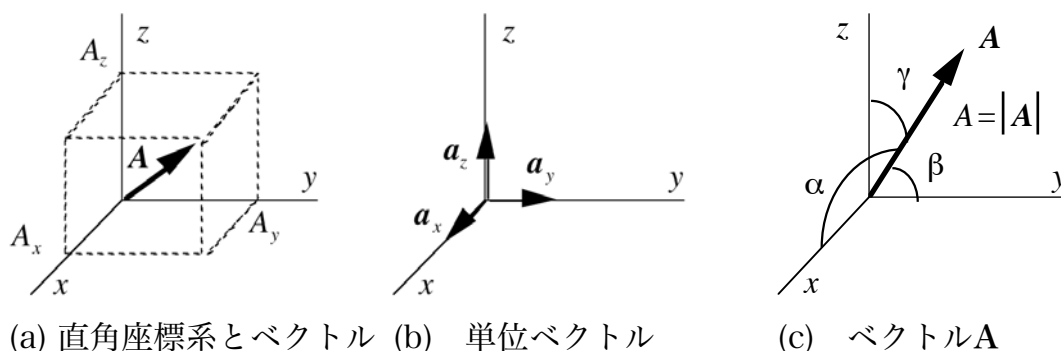


図2.1 直角座標系

直角座標系は3次元的空間で最もよく使われる座標系であり、図2.1のように x, y, z の座標軸を選ぶ。(b)は単位ベクトル a_x, a_y, a_z の向きを示している。単位ベクトルは向きが重

要であって始点は特に意味を持たない。軸に沿っていることのみが重要であり、これらは右手系をなしている。

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \quad \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \quad (2.1.1)$$

(c)のようにベクトル $\mathbf{A}$ と x, y, z 軸のなす角度をそれぞれ、 α, β, γ とすれば、

ベクトル $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{A} = A \cos \alpha \mathbf{a}_x + A \cos \beta \mathbf{a}_y + A \cos \gamma \mathbf{a}_z$$

と書くこともでき、 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ を方向余弦(directional cosine)という。

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \quad \cos \beta = \frac{A_y}{A}, \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{A}$$

2-2 円筒座標系 (ρ, φ, z)

(Circular Cylindrical Coordinate System)

円筒座標は円筒状や線状のものを扱う場合に都合が良い。無限長のものを扱う際に、座標変数を3つから2つに減らすことができ、解析が簡単になる。

円筒座標では図2.2のように x, y 面に円を描き、半径方向を ρ ($0 \leq \rho \leq \infty$) あるいは r とする。 z 軸からの距離を示している。記号として ρ とするのは、球座標の r との混同を避けるために使われるが、球座標との関係が無いときには r でもよい。

x 軸から y 軸方向に反時計回りに回る角度を φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)、あるいは θ とする。これも球座標との関係が無い場合、 θ でもよい。円筒座標の成分を指定するときは (ρ, φ, z) の順に書くことになっている。

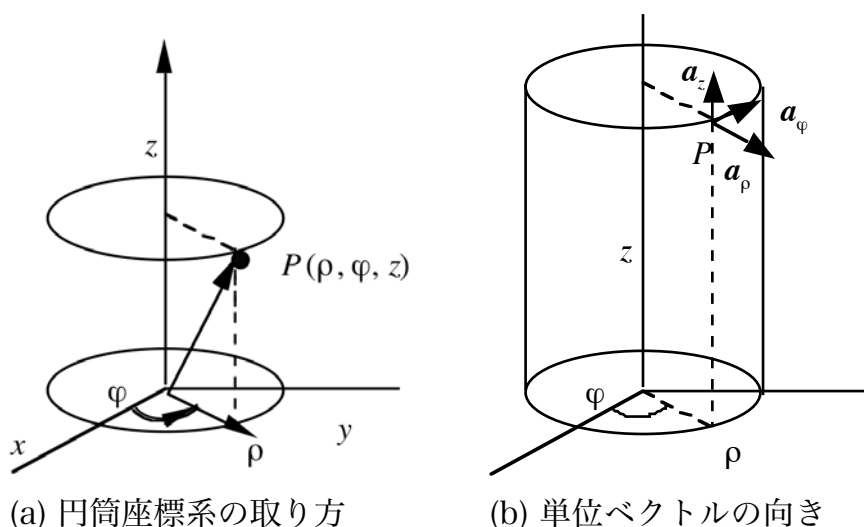


図2.2 円筒座標系

単位ベクトルは $\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z$ であり, (b)のように定められている. どの場所でもこれらの単位ベクトルは直交しており, 右手系をなしている.

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\varphi \quad (2.2.1)$$

直角座標との関係は

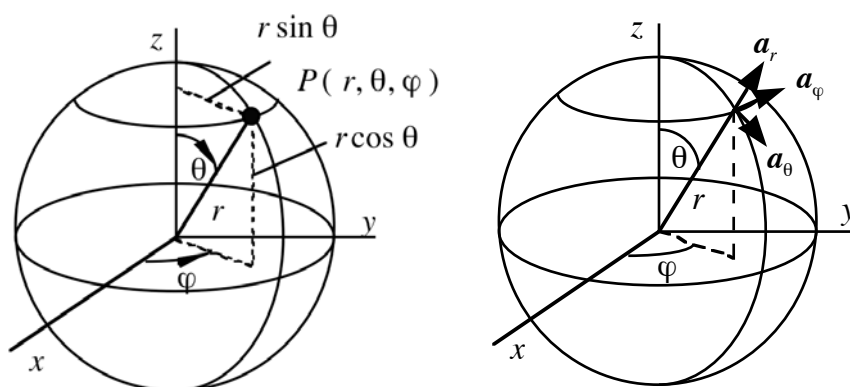
$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= \rho \sin \varphi & \varphi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z & z &= z \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

2-3 球座標系 (r, θ, φ)

(Spherical Coordinate System)

球座標は, 宇宙などの様子を想定すると都合の良い座標系である. どのような大きさの物体でも, 十分遠方から眺めると点と見なせるようになり, 距離だけが重要なパラメータになることがある. そのような場合に便利な座標系である.

球座標では, 図2.3のように球の中心からの半径を r , 北極から測った角度を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), x 軸から測った角度を φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) として, (r, θ, φ) の順にかく.



(a) 球座標系の取り方

(b) 単位ベクトルの向き

図2.3 球座標系

単位ベクトルは $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$ であり, (b)のように定められている.

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\varphi, \quad \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \quad (2.3.1)$$

これらの座標系とその単位ベクトルの取り方は約束事であるので覚えておく必要がある. この順序を変えると右手系が成立しなくなる.

直角座標との関係は $x = r \sin \theta \cos \varphi$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\begin{aligned}
 y &= r \sin \theta \sin \varphi & \theta &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\
 z &= r \cos \theta & \varphi &= \tan^{-1} \frac{y}{x}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.2}$$

2-4 ベクトル成分の座標変換

ある座標系で、ベクトルの成分が与えられたとき、他の座標系による表現が必要になってくることがある。例えば z 方向の電流が分かっているとき、十分遠方における電波の放射を考える場合などがある。

ベクトル自身は座標系を変えても変わらないが（どのような座標系で見ようともベクトルはそのベクトルそのものである）、座標系の取り方によって、成分表示が変わってくる。このベクトル成分の座標変換にはベクトルの内積が大きな役割を果たす。どのように使われるかを具体的に示していこう。

2-4-1 直角座標と円柱座標の変換

内積の定義から、任意のベクトルは単位ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を用いて

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_3) \mathbf{u}_3 \tag{2.4.1}$$

のように書くことができた。そこで、 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ に対して、各座標系の単位ベクトルを代入して展開してみよう。

$$\text{直角座標} \quad \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_y + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z) \mathbf{a}_z = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \tag{2.4.2}$$

$$\text{円柱座標} \quad \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho) \mathbf{a}_\rho + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\varphi) \mathbf{a}_\varphi + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z) \mathbf{a}_z = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\varphi \mathbf{a}_\varphi + A_z \mathbf{a}_z \tag{2.4.3}$$

これらの2式が互いに等しいので、さらに $\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z$ との内積をとり、比べると

$$\begin{aligned}
 A_\rho &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho \\
 A_\varphi &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\varphi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\varphi + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\varphi \\
 A_z &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z
 \end{aligned}
 \tag{2.4.4}$$

となる。単位ベクトル同士の内積は、円筒座標系の定義から（図2.4を参照）、次のようになる。

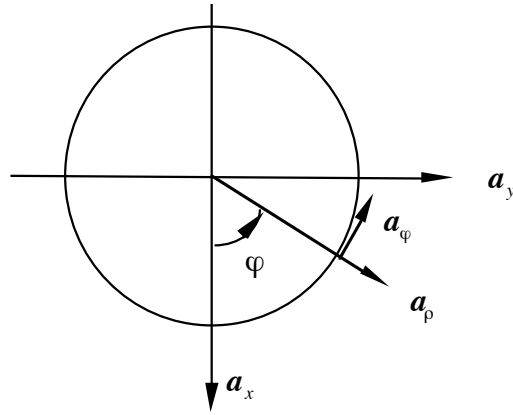


図2.4 円筒座標系と直角座標系の単位ベクトル

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho &= \cos \varphi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho &= \sin \varphi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho &= 0 \\
 \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\varphi &= -\sin \varphi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\varphi &= \cos \varphi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\varphi &= 0 \\
 \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z &= 0, & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z &= 0 & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z &= 1
 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

したがって、円筒座標系で表したベクトル成分は、次の形になる。

$$\begin{aligned}
 A_\rho &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi + A_z 0 \\
 A_\varphi &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi + A_z 0 \\
 A_z &= A_x 0 + A_y 0 + A_z 1
 \end{aligned}$$

これを行列形式で書くと

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \tag{2.4.6}$$

(2.4.6)は、直角座標系と円筒座標系でのベクトル成分の変換を表す式である。

2-4-2 球座標と直角座標

直角座標と球座標でも同様な手順でベクトル成分の変換が可能である。

$$\text{直角座標} \quad \mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \tag{2.4.7}$$

$$\text{球座標系} \quad \mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\varphi \mathbf{a}_\varphi \tag{2.4.8}$$

2つの式にさらに $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$ との内積をとり，比べると成分の間には次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r \\ A_\theta &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta \\ A_\varphi &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\varphi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\varphi + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\varphi \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

内積演算の結果（図2.3も参照）

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r &= \sin \theta \cos \varphi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r &= \sin \theta \sin \varphi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r &= \cos \theta \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta &= \cos \theta \sin \varphi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta &= -\sin \theta \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\varphi &= -\sin \varphi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\varphi &= \cos \varphi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

となる．したがって行列形式で書くと変換は次のようになる．

$$\text{直角座標から球座標へ} \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.4.11)$$

$$\text{球座標から直角座標へ} \quad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \quad (2.4.12)$$

2-4-3 球座標と円筒座標

球座標系と直角座標系での変換，及び直角座標と円筒座標の関係を続けて使えば，互いの関係を導くことができる．

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\text{円筒座標から球座標へ} \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.4.13)$$

$$\text{球座標から円筒座標へ} \quad \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \quad (2.4.14)$$

問題

- 2-1 球座標でベクトルが $\mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\varphi$ のとき, x y z を使った直角座標の成分に変換しなさい.
- 2-2 $\mathbf{R} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z$ を球座標成分に変換しなさい.
- 2-3 $\mathbf{A} = \rho \mathbf{a}_\rho + \rho \mathbf{a}_\varphi$ を直角座標成分に変換しなさい.
- 2-4 直角座標とはどのように定義されますか? 図と単位ベクトルを書きなさい.
- 2-5 円筒座標とはどのように定義されますか? 図と単位ベクトルを書きなさい.
- 2-6 球座標とはどのように定義されますか? 図と単位ベクトルを書きなさい.

2-5 線素

線素は位置の微小変化分をベクトル $d\mathbf{l}$ で表したもので、

$$\text{直角座標} \quad d\mathbf{l} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz \quad (2.5.1)$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\text{円筒座標} \quad d\mathbf{l} = \mathbf{a}_\rho d\rho + \mathbf{a}_\phi \rho d\phi + \mathbf{a}_z dz \quad (2.5.2)$$

$$dl^2 = d\rho^2 + (\rho d\phi)^2 + dz^2$$

$$\text{球座標} \quad d\mathbf{l} = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\phi r \sin\theta d\phi \quad (2.5.3)$$

$$dl^2 = dr^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin\theta d\phi)^2$$

にて与えられる。

直角座標では図2.5のように、点Pから点Qまでの長さ変化分はベクトルとして $d\mathbf{l} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz$ にて表されるので、直観的に理解しやすい。

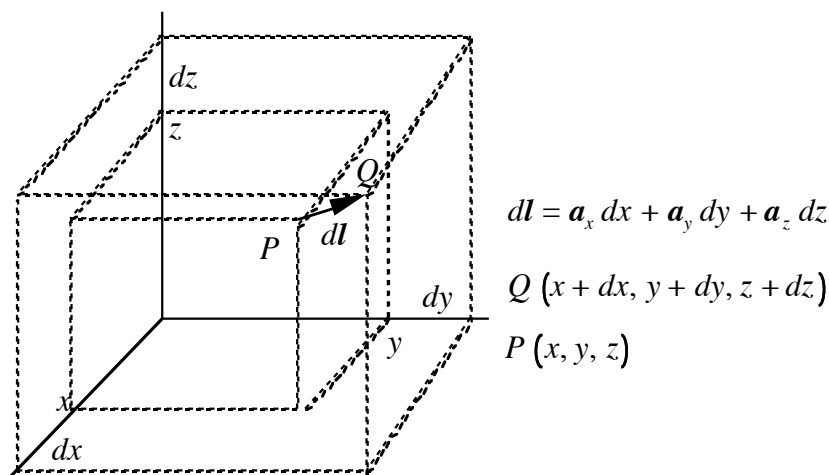


図2.5 直角座標系における微小変化分

円柱座標ではどうであろうか？図2.6 を参照して、半径 ρ 方向と z 方向では、長さの変化分はそれぞれ $d\rho$ と dz になる。角度方向では、図2.7 のように角度が $d\phi$ だけ動くと円弧の長さは半径に応じて $\rho d\phi$ だけ変化する。半径が ρ であれば、円周長さは $2\pi\rho$ となることから了解されよう。それ故、各方向の微小長の和として $d\mathbf{l} = \mathbf{a}_\rho d\rho + \mathbf{a}_\phi \rho d\phi + \mathbf{a}_z dz$ となる。

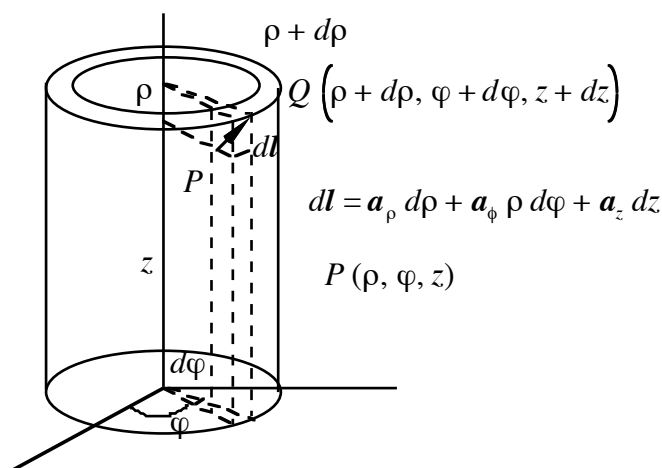


図2.6 円筒座標系における微少変化分

球座標では、 θ 方向の微小角度変化 $d\theta$ は弧の長さ $r d\theta$ の変化をもたらす。また、 φ 方向では動径として $r \sin \theta$ なので、 $r \sin \theta d\varphi$ の弧の長さとなる。したがって、各方向の長さの和として $dl = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\varphi r \sin \theta d\varphi$ となる。

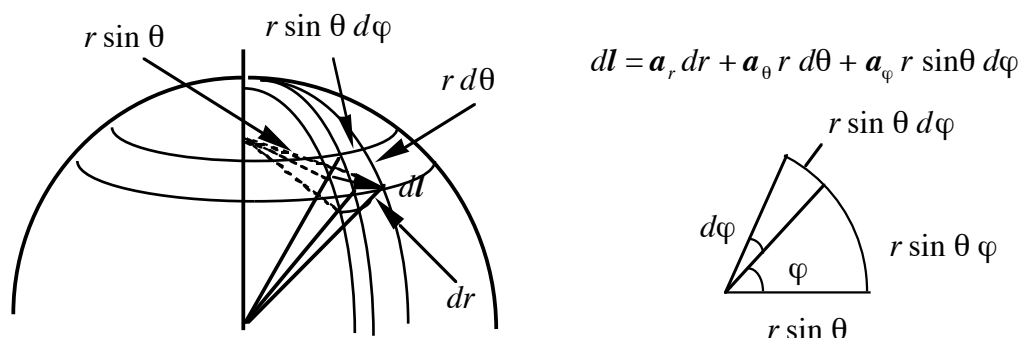


図2.7 弧の長さ

線素は、ベクトルの方向微分、演算子、線積分、面積分、体積積分、座標変換などで大きな役割を果たす。(2.5.1)-(2.5.3)の形式の中で、ある特定の線素だけを選び出して、各種の演算を行うことができる。例えば、(2.5.1)から x 方向の線素 $d\mathbf{l}_x = \mathbf{a}_x dx$ だけを選び、他のベクトルとの内積積分

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x dx = \int A_x dx \quad \text{etc.}$$

は x 軸に沿った線積分になる。

また、線素同士のベクトル積を作れば面積ができるので、次に面素を作ってみよう。

2-6 面素と面ベクトル

面には表と裏の2面がある．面の向きをベクトルの方向とし，面積をベクトルの大きさとして面ベクトルを作ることができる．

x 方向の線素 $d\mathbf{l}_x = \mathbf{a}_x dx$ と y 方向の線素 $d\mathbf{l}_y = \mathbf{a}_y dy$ で外積を作ってみる．

$$d\mathbf{l}_x \times d\mathbf{l}_y = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y dx dy = \mathbf{a}_z dx dy = \mathbf{a}_z dS_z \quad (2.6.1)$$

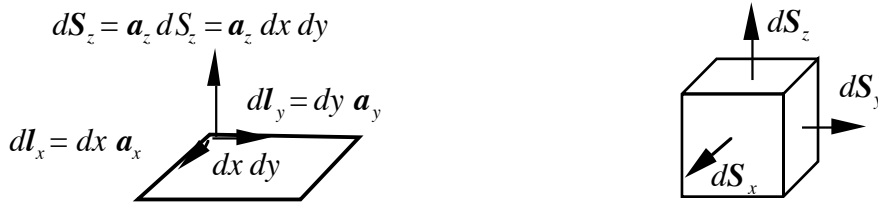


図2.8 直角座標系における面ベクトル

大きさが面積 (dS_z) で z 方向 ($\mathbf{a}_z$) を向く面ベクトルができる．外積の順序を逆にする と，-z 方向を向くベクトルとなる．x 方向，y 方向に関しても同様である．

微小な線素によりできる面積は微小である．そこで，この微小面積を面素と呼び，ベクトルとして

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}_x &= d\mathbf{l}_y \times d\mathbf{l}_z = \mathbf{a}_x dy dz = \mathbf{a}_x dS_x \\ d\mathbf{S}_y &= d\mathbf{l}_z \times d\mathbf{l}_x = \mathbf{a}_y dx dz = \mathbf{a}_y dS_y \\ d\mathbf{S}_z &= d\mathbf{l}_x \times d\mathbf{l}_y = \mathbf{a}_z dx dy = \mathbf{a}_z dS_z \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

のように表現する．

面積が dS で，その法線方向が $\mathbf{n}$ の場合，
を面ベクトルいう．

$\mathbf{n}$ の向きは面に垂直であり，
面の輪郭を反時計回りに面を見たときに
上向きを取ることになっている（右手系）．

$$\boxed{d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS} \quad (2.6.3)$$

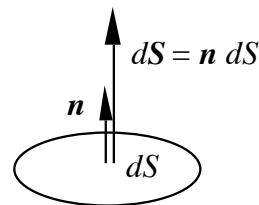


図2.9 面ベクトル

円筒座標や球座標でも同様に面ベクトルを作ることができる．

円筒座標では

$$\begin{aligned} \rho \text{ 方向} \quad d\mathbf{S}_\rho &= \mathbf{a}_\phi \rho d\phi \times \mathbf{a}_z dz = \mathbf{a}_\rho \rho d\phi dz = \mathbf{a}_\rho dS_\rho \\ \phi \text{ 方向} \quad d\mathbf{S}_\phi &= \mathbf{a}_z dz \times \mathbf{a}_\rho d\rho = \mathbf{a}_\phi d\rho dz = \mathbf{a}_\phi dS_\phi \\ z \text{ 方向} \quad d\mathbf{S}_z &= \mathbf{a}_\rho d\rho \times \mathbf{a}_\phi \rho d\phi = \mathbf{a}_z \rho d\rho d\phi = \mathbf{a}_z dS_z \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

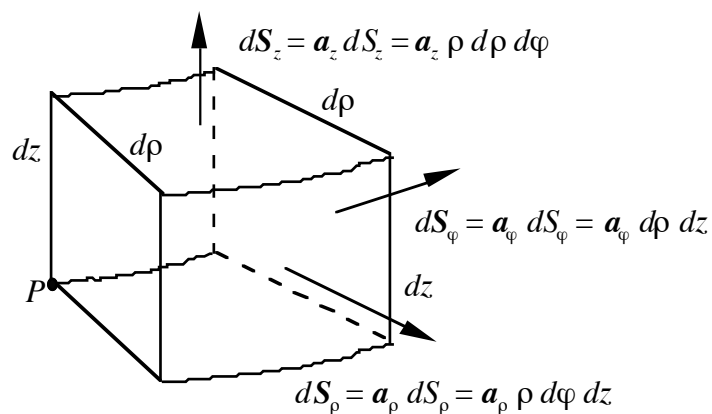


図2.10 円筒座標系における面ベクトル

球座標では

$$r \text{ 方向} \quad dS_r = a_r dS_r = a_\theta r d\theta \times a_\phi r \sin\theta d\phi = a_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\theta \text{ 方向} \quad dS_\theta = a_\theta dS_\theta = a_\phi r \sin\theta d\phi \times a_r dr = a_\theta r \sin\theta dr d\phi \quad (2.6.5)$$

$$\phi \text{ 方向} \quad dS_\phi = a_\phi dS_\phi = a_r dr \times a_\theta r d\theta = a_\phi r dr d\theta$$

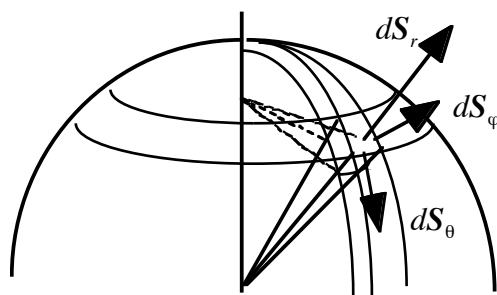


図2.11 球座標系における面ベクトル

工学の分野では、あるベクトルと面ベクトルの内積によって面積積分を行うことがある。積分を行った量は束（フラックス, Flux）と呼ばれている。このような演算に面ベクトルがよく使われる。

$$\text{フラックス} = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

2-7 体積素，微小体積

面積と高さを掛けると体積となる．これをベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ の演算で表すと，
 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ で与えられる．スカラー3重積を参照のこと．ベクトル積 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ は面積を表すので，それに高さを掛ければ（面素とのスカラー積），体積となる．線素によって微小体積を表すと次のようになる．

$$\text{直角座標系} \quad dV = d\mathbf{l}_x \times d\mathbf{l}_y \cdot d\mathbf{l}_z = dx \, dy \, dz \quad (2.7.1)$$

$$\text{円筒座標系} \quad dV = d\mathbf{l}_\rho \times d\mathbf{l}_\varphi \cdot d\mathbf{l}_z = \rho d\rho \, d\varphi \, dz \quad (2.7.2)$$

$$\text{球座標系} \quad dV = d\mathbf{l}_r \times d\mathbf{l}_\theta \cdot d\mathbf{l}_\varphi = r^2 dr \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (2.7.3)$$

問題

2-7 半径 r の球の表面積を求めよ．

2-8 半径 r の球の体積を求めよ．

2-9 半径 r ，長さ l の円柱の体積を求めよ．

2-10 面ベクトルの定義は何ですか？