

ベクトル解析資料



2008年5月 改訂

山口芳雄

はじめに

工学系（特に電気電子・情報系）では重要な法則や定理は数学を用いて表現されている。重要な法則や定理をよく理解し、応用するためには、数学を十分に理解しておくことが必要である。・・・この点は、だれも異論の無いところであろう。

しかし、これまでの多くの数学の教科では、使われる数学を記述していて、いかに使うかについては、あまり触れられていないようにも思われる。そして、数学は数学、専門科目は専門科目と別々に（関連性を考えずに）受け取っている学生も見受けられる。

専門分野でどのようにしたら、目的が達せられるか？ この点が、将来の工学系の技術者、研究者として最も大切な点である。工学で扱う数学は、目的達成のための手段であり、数学そのものを研究対象としてはいない。現実の世界には多くの問題があるであろうが、細かな点にばかり気を取られて、本質を見失うようになってはならない。常に本質的な点を捕らえる事が最も重要である。

数学を学ぶことは、専門を学ぶための必要条件であっても十分条件ではない。数学を知らなくとも、仕事ができるかも知れない。しかし、数学を知っていれば、よりよく仕事ができると思われる。また、数学が得意な人は、いかに数学を使うかを学ぶように期待したい。そして、将来、自分の研究テーマを通じてどのように数学と工学・専門分野が関連づけられているか、よく考えて欲しい。

ベクトル解析の概要

工学系分野では、力、速度、電界、磁界など、大きさと方向をもつ量を扱うことが多い。この大きさや方向をもつ量はベクトルとして知られている。ベクトルは現象を表現したり、解析したりする際に非常に重要な基本量である。そして重要な物理法則や定理はベクトルを用いて表現されている。

このプリントは、ベクトルの知識、その取り扱い方、演算方法の修得を目的として書いている。工学的な見方のベクトル解析である。主な内容は、ベクトルの表現、性質、スカラー量との違い、ベクトルと座標系、直角座標、円筒座標、球座標、内積、外積、微分、線積分、面積分、演算子としてのgradient, divergence, rotation, laplacian, ガウスの発散定理、ストークスの定理、グリーンの定理、等である。できるだけ直観的に理解できるように、また、ベクトル場としての概念や、他の数学の分野、線形代数、常微分・偏微分方程式への関連などについても述べる。

ベクトルとは

大きさと方向を持つ量。例：?????

有向線分で矢印で表す。

vect: ラテン語で「輸送」を意味する言葉。

スカラーとは

大きさだけで定まる量。方向を持たない。例：?????

scalar, scale, 目盛り, サイズの意味で数値だけで表現できるもの。

(英語での発音はスケーラーに近い)

ベクトル場とは

空間の各点で、位置の関数としてベクトルが定まる場・空間

位置の関数としてベクトルが分布している空間 例：?????

降雪時に車で、雪片の流れる様子を見ると流速ベクトル場が見える？

スカラー場とは

空間の各点で、位置の関数として大きさが定まる場・空間

位置の関数としてスカラー量が分布している空間

例：?????

なぜベクトルやベクトル場を学ぶのか？

数学, 電磁気学, 力学 自然現象の理解

科学・技術の基礎

科学・技術の発展のため

自分のため

ベクトル解析目次

はじめに

1章 ベクトルの表現方法

- 1.1 ベクトルが等しいとは
 - 1.2 ベクトル解析で扱うベクトル
 - 1.2.1 位置ベクトル
 - 1.2.2 場のベクトル
 - 1.3 基本的な代数演算
 - 1.3.1 ベクトルのスカラー倍
 - 1.3.2 ベクトルの和 (Addition, or Sum)
 - 1.3.3 ベクトルの差 (Subtraction)
 - 1.4 ベクトルの積
 - 1.4.1 ベクトルの内積 (Scalar product, Inner product)
 - 1.4.2 ベクトルの外積 (Vector product, Cross product, ベクトル積)
 - 1.4.3 スカラー3重積
 - 1.4.4 ベクトル3重積
 - 1.5 成分を使った表記法
 - 1.5.1 ベクトルの和と差
 - 1.5.2 ベクトルの内積
 - 1.5.3 ベクトルの外積
 - 1.6 ベクトル基底
 - 1.6.1 線形従属と線形独立
 - 1.6.2 正規直交基底 (Orthonormal basis)の作り方
- 問題

2章 座標系

- 2.1 直角座標系 (デカルト座標)
 - 2.2 円筒座標系
 - 2.3 球座標系
 - 2.4 ベクトル成分の座標変換
 - 2.4.1 直角座標と円柱座標の変換
 - 2.4.2 球座標と直角座標の変換
 - 2.4.3 球座標と円筒座標の変換
- 問題
- 2.5 線素 直角座標, 円柱座標, 球座標
 - 2.6 面素と面ベクトル

2.7 体積素, 微小体積
問題

3章 勾配, 傾き, gradient
直角座標, 円柱座標, 球座標による表現
問題

4章 発散
4.1 直角座標系による表現
4.2 円柱座標系による表現
4.3 球座標系による表現
4.4 ガウスの発散定理
問題

5章 ベクトルの回転
5.1 直角座標系による表現
5.2 円柱座標系による表現
5.3 球座標系による表現
5.4 ストークスの定理
問題

6章 ラプラシアン, ベクトル公式, 定理
6.1 ラプラシアン
6.2 ベクトル公式
6.3 グリーンの定理
6.4 ヘルムホルツの定理
6.5 ベクトル演習問題
6.6 ベクトル公式一覧表

参考文献

内藤喜之, 電気数学 1, 森北出版, 1975.

Hwei P. Hsu, Applied Vector Analysis, College Outline Series, H. B. J. Publishers, 1984.