ラプラス(Laplace)の方程式とその解について

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0}$$

ラプラスの方程式は2階の微分方程式で，一般的に3つの座標変数をもつ．ここでは，直角座標系，円筒座標系，球座標系におけるラプラスの方程式の解き方を説明しよう．座標変数ごとに方程式を分離し，それを解いていく方法は変数分離法と呼ばれる．

変数分離解と固有関数展開法

1. 直角座標系におけるラプラスの方程式と解

３次元の偏微分方程式
$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

を解くために，x, y, z について互いに独立な関数の積で成り立っていると考え，

$\phi\,(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$ 　とおいて代入してみる．

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{\partial^2 X(x)\,Y(y)\,Z(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)\,Y(y)\,Z(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)\,Y(y)\,Z(z)}{\partial z^2} \\ &= Y(y)\,Z(z)\,\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\,Z(z)\,\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x)\,Y(y)\,\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}\end{aligned}$$

全体を $X(x)\,Y(y)\,Z(z)$ で割ると次の式となる．

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0 \tag{1.2}$$

各変数について，この式が成り立たなくてはならない．各項は独立なので，式全体からすると変数に無関係な定数でなくてはならない．そのため，この定数をそれぞれ，

$$-k_x^2,\ -k_y^2,\ -k_z^2$$

とおくと　$\dfrac{1}{X(x)}\dfrac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k_x^2$ ，$\dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2$ ，$\dfrac{1}{Z(z)}\dfrac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k_z^2$

になる．ただし，定数の間には次の関係がある．

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = 0 \tag{1.3}$$

そこで，ｚに関する方程式を例にとると，変数がｚだけであるから偏微分から常微分の形式に書くことができる．

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -k_z^2 Z(z) \tag{1.4}$$

この解は
$$Z(z) = A_3 \exp\left(j k_z z \right) + B_3 \exp\left(-j k_z z \right) \tag{1.5}$$

である．なお，$k_z = 0$ のときは　$Z(z) = C_3 z + D_3$

となるので$k_z = 0$ の場合も含めて(1.4)の解は

$$Z(z) = A_3 \exp\left(j k_z z \right) + B_3 \exp\left(-j k_z z \right) + C_3 z + D_3 \tag{1.6}$$

と置くことができる．

また，
$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2 X(x), \qquad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -k_y^2 Y(y)$$

に関しても同様に解を求めることができる．なお，$Z(z)$と同様にexp 関数展開もできるが，cos やsin 関数でも展開できる．そこで，次のように展開しておく．

$$X(x) = A_1 \cos k_x x + B_1 \sin k_x x + C_1 x + D_1 \tag{1.7}$$

$$Y(y) = A_2 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y + C_2 y + D_2 \tag{1.8}$$

以上より，３次元の偏微分方程式の解は変数分離解の積　$\phi(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$

によって与えられる．$A_1, A_2, \sim, D_3$は未定定数であり，問題に応じて決めればよい．このように変数を分離して解く方法を**変数分離法**という．

なお，問題によっては変数分離解の中ですべての関数が必要というわけではない．３つの関数系の積の中で適当なものを選び，例えば

$$\phi(x,y,z) = A_1\ B_2\ D_3 \cos k_x x \sin k_y y$$

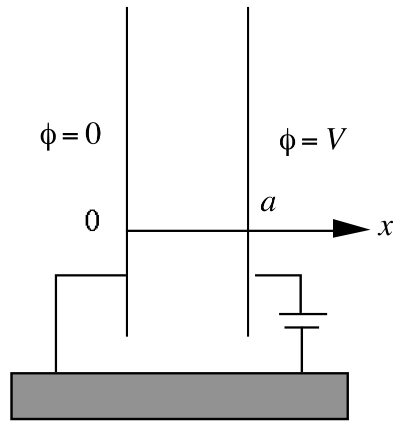
もラプラスの方程式の解であるし，

$$\phi(x,y,z) = A_2\ B_2\ D_3 \sin k_x x \sin k_y y$$

も解である．どれを選ぶかは問題に依存する．通常は，はじめから境界条件を満たすような関数系を選ぶのが最良の方法である．どの関数を選ぶかはその人の判断であるし，センスによる．以下に具体例によって，どのような関数を選ぶか示そう．

例題1-1　１次元問題　$\nabla^2\phi = \dfrac{d^2\phi}{dx^2} = 0$

図に示すような２枚の平行平板（ｙとｚ方向に無限と仮定）にポテンシャル差Ｖを与えたとき，ｘ方向のφの分布を求めてみよう．最も基本的な１次元の例題である．



$$\nabla^2\phi = \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

がラプラスの方程式となる．これを解いて

$$\frac{d\phi}{dx} = A \qquad \phi = Ax + B$$

A, B は未定常数．２つの未定常数が出てくるが，
2本の方程式があれば，決定できる．

未定常数を決めるために，境界条件として

$$x = 0 \quad \text{で} \quad \phi = 0 \qquad \therefore \quad B = 0$$

$$x = a \quad \text{で} \quad \phi = V \qquad \therefore \quad A = \frac{V}{a}$$

となる．したがって，$\phi = \dfrac{V}{a}x$ となり，ポテンシャルφを求めることができる．

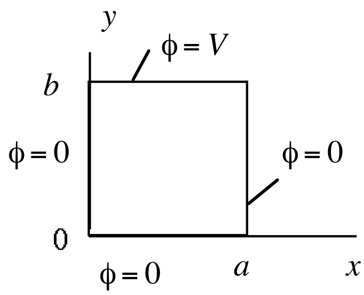
例題1-2　２次元問題　$\nabla^2\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$

図のように長方形の金属導体があり，

$$x = 0, a,\ y = 0 \quad \text{で} \quad \phi = 0$$

$$y = b \quad \text{で} \quad \phi = V$$

であるとき，方形内部（空洞）のポテンシャルφを求めてみよう．



$\phi = X(x)\,Y(y)$と変数分離して，　$\dfrac{1}{X(x)}\dfrac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k_x^2 \quad \text{とおくと} \quad -k_x^2 + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0$$

$$X(x) = A\sin k_x x + B\cos k_x x \qquad Y(y) = C\sinh k_x y + D\cosh k_x y$$

$x = 0, a$ で $\phi = 0$ だから $B = 0$．つまり境界条件を満たすように $\sin k_x x$ を採択し $\cos k_x x$ を捨てる．この場合，$\sin k_x a = 0$ となるので　$k_x = \dfrac{n\pi}{a}$　$(n = 1, 2, 3, ...)$

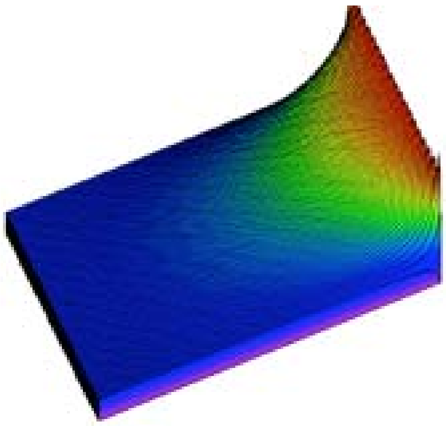
$y = 0$ で $\phi = 0$ だから $D = 0$．　　$\therefore\ \phi = X(x)\,Y(y) = AC \sin \dfrac{n\pi x}{a} \sinh \dfrac{n\pi y}{a}$

$y = b$ で x の値に関わらず　$\phi = V$ より　　$V = AC \sinh \dfrac{n\pi b}{a}$　$\therefore\ AC = \dfrac{V}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}}$

したがって，ポテンシャル ϕ は次の級数表現となる．

$$\phi\,(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

この級数解を絵として示すと次のようになる．



ポテンシャル ϕ の分布

例題1-3　３次元問題　　$\nabla^2\phi = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$

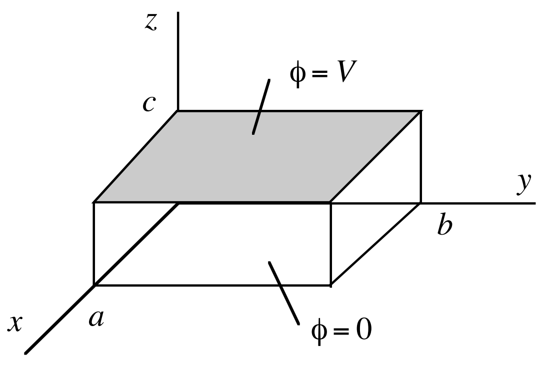
右図に示す直方体内部のポテンシャルを求める．
条件は以下の通りである．

$\phi\,(\,x, y, z = c\,) = V$

$\phi\,(0, y, z\,) = \phi\,(a, y, z\,) = 0$

$\phi\,(x, 0, z\,) = \phi\,(x, b, z\,) = 0$

$\phi\,(x, y, z = 0\,) = 0$



$\phi = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$とおき，

$x = 0, a$ で $\phi = 0$ だから，　$k_x = \dfrac{m\pi}{a}$　　$X(x) = \sin\dfrac{m\pi x}{a}$　　$(m = 1, 2, 3, \cdots)$

$y = 0, b$ で $\phi = 0$ だから，　$k_y = \dfrac{n\pi}{b}$　　$Y(y) = \sin\dfrac{n\pi y}{b}$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$k_z = \sqrt{-k_x^2 - k_y^2} = j\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = j\,\gamma_{nm}$$

$$Z(z) = \sin(\,j\,\gamma_{nm} z) = \sinh \gamma_{nm} z$$

と置くことができるので，m, n に対応したポテンシャルは次のようになる．

$$\phi_{nm} = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sinh\gamma_{nm} z$$

この基本式（固有関数）を使い，直方体内部のポテンシャルをこの固有関数列で展開する．

$$\phi = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\,\phi_{nm}$$

展開係数A_{nm}は境界条件式に代入してから決める．

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sinh\gamma_{nm} c = V$$

A_{nm}を求めるために両辺に$\sin\dfrac{m'\pi x}{a}\sin\dfrac{n'\pi y}{b}$をかけ，$x$，$y$ についてそれぞれ $0 \sim a$，$0 \sim b$ にわたって積分すると，これらの関数列の直交性から，次のようになる．

$$A_{nm} = \begin{cases} \dfrac{16V}{mn\pi^2\sinh\gamma_{mn} c} & (m\,n : \mathrm{odd}) \\ 0 & (m\,n : \mathrm{even}) \end{cases}$$

それゆえ，直方体内部のポテンシャルは，最終的に次の固有関数展開で表すことができる．

$$\phi(x, y, z) = \frac{16V}{\pi^2}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\sinh\gamma_{nm} z}{m\,n\sinh\gamma_{mn} c}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

2. 円筒座標系におけるラプラスの方程式と解

一般形３次元問題
$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.1)$$

$\phi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\,\Phi(\varphi)\,Z(z)$と変数分離してラプラスの方程式に代入すると，次式が導かれる．

$$\Phi(\varphi)\,Z(z)\frac{\partial^2 P(\rho)}{\partial\rho^2} + \Phi(\varphi)\,Z(z)\frac{1}{\rho}\frac{\partial P(\rho)}{\partial\rho} + P(\rho)\,Z(z)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} + P(\rho)\,\Phi(\varphi)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P(\rho)}\frac{\partial^2 P(\rho)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{P(\rho)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P(\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.2)$$

各変数について，この式が成り立たなくてはならない．そして，各項は各変数の値で成り立っているので，変数に無関係な定数でなくてはならない．そこで,

$\dfrac{1}{Z(z)}\dfrac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = k^2 \neq 0$（定数）とおいて，変数分離解を求める．

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = k^2 Z(z) \qquad \therefore \quad Z(z) = A_3 \exp(k\,z) + B_3 \exp(-k\,z) \qquad (2.3)$$

また，$\dfrac{1}{\Phi(\varphi)}\dfrac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = -n^2 \neq 0$（定数）とおくと， $\dfrac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -n^2\Phi(\varphi)$

$$\Phi(\varphi) = A_2 \exp(\,j\,n\varphi\,) + B_2 \exp(\,-j\,n\varphi\,) = A_2' \sin n\varphi + B_2' \cos n\varphi \qquad (2.4)$$

半径方向に関しては， $\dfrac{1}{P(\rho)}\dfrac{\partial^2 P(\rho)}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{P(\rho)}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P(\rho)}{\partial\rho} - \dfrac{n^2}{\rho^2} + k^2 = 0$

$$\frac{1}{P(\rho)\,\rho}\frac{d}{d\rho}\ \ \rho\frac{dP(\rho)}{d\rho}\ \ -\frac{n^2}{\rho^2} + k^2 = 0 \qquad (2.5)$$

$k\rho = \xi$なる変数変換を行えば，(2.5)は

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\ \ \xi\frac{dP(\xi)}{d\xi}\ \ +\ \ 1 - \frac{n^2}{\xi^2}\ \ P(\xi) = 0 \qquad (2.6)$$

となり，Besselの微分方程式が得られる．この解は円筒関数として知られており，次式で与えられる．

Bessel関数 $$J_n(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi^{n+2m}}{2^{n+2m} m!\, \Gamma(m+n+1)} \ , \quad n \geq 0 \tag{2.7}$$

Neumann関数 $$N_n(\xi) = \frac{1}{\sin n\pi}\left[\cos n\pi\, J_n(\xi) - J_{-n}(\xi)\right] \tag{2.8}$$

Hankel関数 $$H_n^{(1)}(\xi) = J_n(\xi) + j\, N_n(\xi) \tag{2.9}$$

$$H_n^{(2)}(\xi) = J_n(\xi) - j\, N_n(\xi) \tag{2.10}$$

これらの関数の線形結合として半径方向の関数は一般的に次のようになる．

$$P(\rho) = A_1 J_n(k\rho) + B_1 N_n(k\rho) = A_1^{'} H_n^{(1)}(k\rho) + B_1^{'} H_n^{(2)}(k\rho) \tag{2.11}$$

したがって，$\phi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\, \Phi(\varphi)\, Z(z)$　は一般に

$$P(\rho) = A_1 J_n(k\rho) + B_1 N_n(k\rho) = A_1^{'} H_n^{(1)}(k\rho) + B_1^{'} H_n^{(2)}(k\rho) \tag{2.11}$$

$$\Phi(\varphi) = A_2 \sin n\varphi + B_2 \cos n\varphi \tag{2.12}$$

$$Z(z) = A_3 \exp(k z) + B_3 \exp(-k z) \tag{2.13}$$

の組み合わせで表現できることになる．

なお，$k=0$　のときは，(2.5)の形式が変わるので個別に示そう．

$k=0, n \neq 0$　のとき，

$$Z(z) = A_3 z + B_3 \quad , \quad \Phi(\varphi) = A_2 \sin n\varphi + B_2 \cos n\varphi \tag{2.14}$$

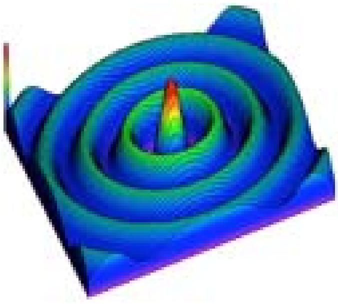
$$\frac{\partial^2 P(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} P(\rho) = 0 \quad \text{だから} \quad P(\rho) = A_1 \rho^n + B_1 \rho^{-n} \tag{2.15}$$

$k=0, n=0$　のとき，

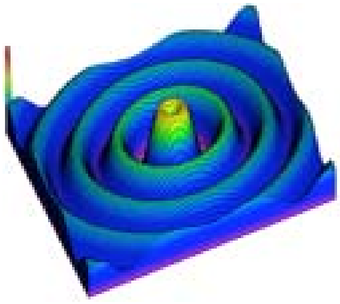
$$Z(z) = A_3 z + B_3 \quad , \quad \Phi(\varphi) = A_2 \varphi + B_2 \tag{2.16}$$

$$\frac{dP(\rho)}{d\rho} + \frac{P(\rho)}{\rho} = 0 \quad \text{だから} \quad P(\rho) = A_1 \ln \rho + B_1 \tag{2.17}$$

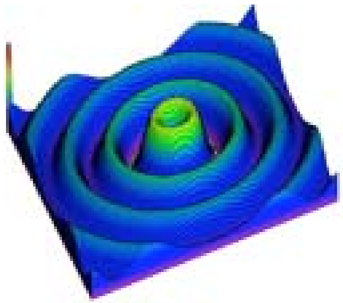
ここで，Bessel（ベッセル）関数について図示しておく．イメージをつかむことができれば，難しくはないと思われる．



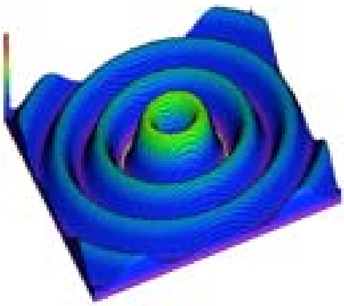
$J_0(x)$



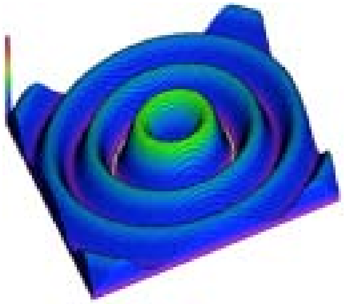
$J_1(x)$



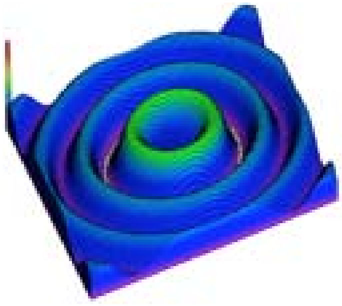
$J_2(x)$



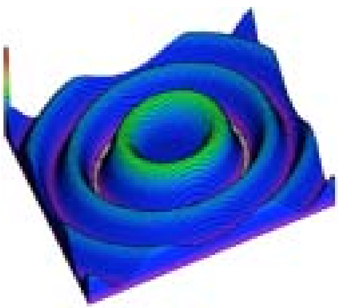
$J_3(x)$



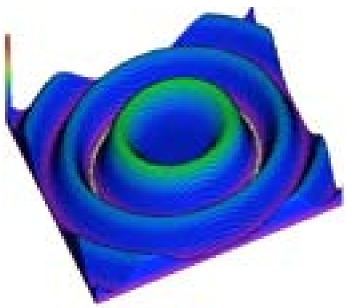
$J_4(x)$



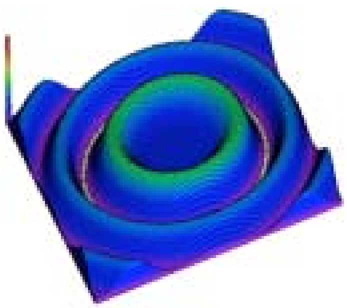
$J_5(x)$



$J_6(x)$



$J_7(x)$



$J_8(x)$

Bessel関数の値による立体図．中心が変数 x ＝0の位置，高さをBessel関数値で示している．

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{n+2m}}{2^{n+2m} m!\, \Gamma(m+n+1)} , \quad n \geq 0$$

例題2-1　一様な電界 E_0（x 方向）の中に半径aの誘電体円柱がある．誘電体の比誘電率をε_rとするとき，円柱外の電位は　$V_1 = -E_0 \rho \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \rho^{-n} \cos n\varphi$

内部は　$V_2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \rho^n \cos n\varphi$

で表される．境界条件からV_1, V_2 は次式となり，円柱の内部で電界は E_0 の方向を向き一様であることを示しなさい．

$$V_1 = -E_0 \left[\rho - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{a^2}{\rho} \right] \cos \varphi \qquad V_2 = -\frac{2E_0}{\varepsilon_r + 1} \rho \cos \varphi$$

解）境界条件で電位の連続性，電束密度法線成分の連続性を使う．

$V_1 = V_2$　　$at\ \rho = a$　より

$V_1 = -E_0 \rho \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \rho^{-n} \cos n\varphi$　　$V_2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \rho^n \cos n\varphi$　に$\rho = a$を代入して

$$-E_0 a \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} k_n a^{-n} \cos n\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} g_n a^n \cos n\varphi$$

$D_{1n} = D_{2n}$　　$\varepsilon_0 \dfrac{\partial V_1}{\partial \rho} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{\partial V_2}{\partial \rho}$　$at\ \rho = a$

$$-E_0 \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} n k_n a^{-n-1} \cos n\varphi = \varepsilon_r \sum_{n=1}^{\infty} n g_n a^{n-1} \cos n\varphi$$

この２本の連立方程式は$\cos n\varphi$ の展開となっている．したがって，$\cos n\varphi$の係数が等しくなければならない．

$\cos \varphi$　では　$-E_0 a + \dfrac{k_1}{a} = g_1 a$　　$\Rightarrow$　　$k_1 = a^2 E_0 \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}$

$-E_0 - \dfrac{k_1}{a^2} = \varepsilon_r g_1$　　$\Rightarrow$　　$g_1 = -\dfrac{2E_0}{\varepsilon_r + 1}$

$\cos 2\varphi$ では　$-\dfrac{k_2}{a^2} = g_2 a$　　$-\dfrac{2k_2}{a^3} = \varepsilon_r\ 2g_2 a$　　$\Rightarrow$　$k_2 = g_2 = 0$

$\cos 3\varphi$ では　$k_3 = g_3 = 0$

$\cos n\varphi$ では　$k_n = g_n = 0$

したがって，　$V_1 = -E_0 \rho \cos\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \rho^{-n} \cos n\varphi = -E_0 \rho \cos\varphi + \frac{a^2}{\rho} E_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \cos\varphi$

$$= -E_0 \left[\rho - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{a^2}{\rho} \right] \cos\varphi$$

$$V_2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \rho^n \cos n\varphi = g_1 \rho \cos\varphi = -\frac{2E_0}{\varepsilon_r + 1} \rho \cos\varphi$$

が得られ，誘電体の内部では　$E_x = \frac{2E_0}{\varepsilon_r + 1}$　となり，一様な電界となる．

3.　球座標系座標系におけるラプラスの方程式と解

$\phi\,(r, \theta, \varphi) = R(r)\,\vartheta(\theta)\,\Phi(\varphi)$とおき，ラプラスの方程式を変形すると次式が得られる．

$$\frac{\sin^2\theta}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{\sin\theta}{\vartheta(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\,\vartheta(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\,\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \tag{3.1}$$

まず，$\dfrac{1}{\Phi(\varphi)}\dfrac{\partial^2\,\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-\,m^2$　とおく．その結果，

$$\frac{d^2\,\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+m^2\,\Phi(\varphi)=0 \tag{3.2}$$

(3.1)は次式に置き換わる　$\dfrac{1}{R(r)}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{\sin\theta\,\vartheta(\theta)}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\dfrac{\partial\,\vartheta(\theta)}{\partial\theta}\right)-\dfrac{m^2}{\sin^2\theta}=0$

さらに　$\dfrac{1}{R(r)}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial R(r)}{\partial r}\right)=n\,(n+1)$　とおいて分離すると2つの微分方程式となる．

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R(r)}{dr}\right)-n\,(n+1)\,R(r)=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\,\frac{\partial\,\vartheta(\theta)}{\partial\theta}\right]+\left[n\,(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\vartheta(\theta)=0 \tag{3.4}$$

それゆえ，ラプラスの方程式は３つの常微分方程式に帰着されることになる．これらの方程式の一般解は次式で与えられる．

$$R(r)=A_n\,r^n+B_n\,r^{-n-1} \tag{3.5}$$

$$\vartheta(\theta)=C_n^m P_n^m\,(\,\cos\theta\,)+D_n^m Q_n^m\,(\,\cos\theta\,) \tag{3.6}$$

$$\Phi(\varphi)=E_m\exp\,(\,j\,m\varphi\,)+F_m\exp\,(\,-\,j\,m\varphi\,) \tag{3.7}$$

$P_n^m\,(\,\cos\theta\,)$，$Q_n^m\,(\,\cos\theta\,)$は陪ルジャンドル関数である．

例題3-1　 r 方向のみのラプラス方程式とポアソン方程式

　球対称の問題では， r 方向のみの微分方程式となる．ここでは，半径 a の誘電体球に電荷密度 ρ が一様に分布しているときの，ポテンシャルを求めてみよう．

$$r < a \qquad\qquad\qquad\qquad r > a$$

$$\nabla^2\phi_1 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,\phi_1}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_1} \qquad \nabla^2\phi_2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,\phi_2}{dr}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,\phi_1}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_1}r^2 \qquad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,\phi_2}{dr}\right) = 0$$

$$r^2\frac{d\,\phi_1}{dr} = -\frac{\rho}{3\,\varepsilon_1}r^3 + C_0 \qquad r^2\frac{d\,\phi_2}{dr} = C_2$$

$$\frac{d\,\phi_1}{dr} = -\frac{\rho}{3\,\varepsilon_1}r + \frac{C_0}{r^2} \qquad \frac{d\,\phi_2}{dr} = \frac{C_2}{r^2}$$

$$\phi_1 = -\frac{\rho}{6\,\varepsilon_1}r^2 - \frac{C_0}{r} + C_1 \qquad \phi_2 = -\frac{C_2}{r} + C_3$$

ただし，$C_0 \sim C_3$ は未定定数

境界条件として

$r = 0$ で ϕ_1 が有限でなければならない．したがって　$C_0 = 0$

$r = \infty$ で ϕ_2 が 0 でなければならない．　$\phi_2 = 0 \ \Rightarrow\ C_3 = 0$

したがって　$\phi_1 = -\dfrac{\rho}{6\,\varepsilon_1}r^2 + C_1$　　$\phi_2 = -\dfrac{C_2}{r}$

また，$r = a$ で電位の連続性，電束密度法線成分の連続性を使う

$r = a$　で　$\phi_1 = \phi_2$　より　　$-\dfrac{\rho}{6\,\varepsilon_1}a^2 + C_1 = -\dfrac{C_2}{a}$

$r = a$　で　$\varepsilon_1\dfrac{d\,\phi_1}{dr} = \varepsilon_2\dfrac{d\,\phi_2}{dr}$　より　　$-\dfrac{\rho}{3}a = \varepsilon_2\dfrac{C_2}{a^2}$

これから　$C_1 = \dfrac{\rho\,a^2}{6\,\varepsilon_1} + \dfrac{\rho\,a^2}{3\,\varepsilon_2}$　　$C_2 = -\dfrac{\rho\,a^3}{3\varepsilon_2}$

$$\therefore \phi_1 = \frac{\rho}{6\,\varepsilon_1}\quad a^2 - r^2 \quad + \frac{\rho\,a^2}{3\,\varepsilon_2} \qquad \phi_2 = \frac{\rho\,a^3}{3\,\varepsilon_2}\frac{1}{r}$$

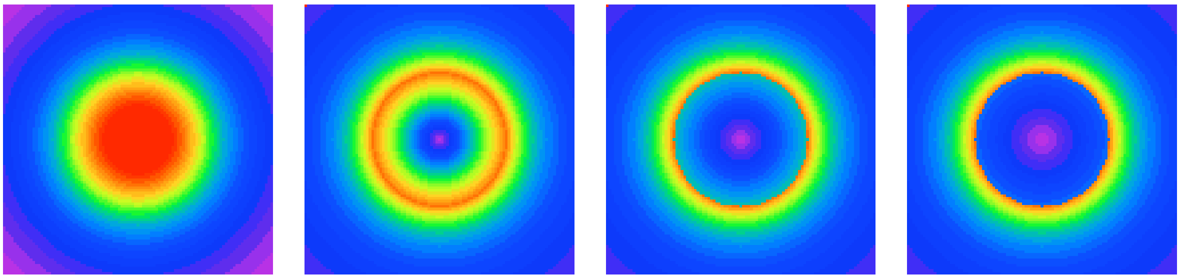
さて，半径aの球に含まれる総電荷は　$Q = \dfrac{4\,\pi\,a^3}{3}\rho$　だから，Qを使って書き直すと

$$\phi_1 = \frac{\rho}{6\,\varepsilon_1}\left(a^2 - r^2\right) + \frac{\rho\, a^2}{3\,\varepsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_1}\left(\frac{a^2 - r^2}{2\,a^3}\right) + \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_2}\frac{1}{a}$$

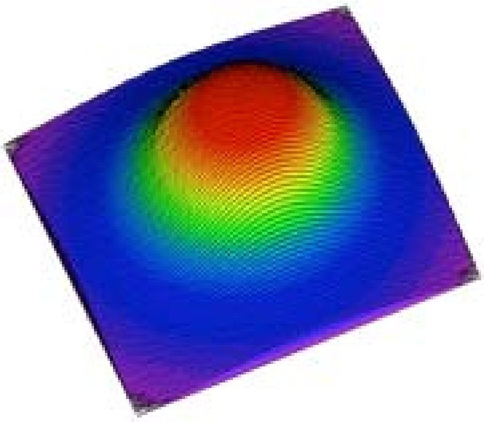
$$\phi_2 = \frac{\rho\, a^3}{3\,\varepsilon_2}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_2}\frac{1}{r}$$

$$E_{r1} = -\frac{\partial\phi_1}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_1}\frac{r}{a^3} \qquad E_{r2} = -\frac{\partial\phi_2}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_2}\frac{1}{r^2}$$

となり，ガウスの法則から得られる式と全く同じ式が得られる．いま，$Q = 4\pi\,\varepsilon_0$とした場合の分布を次の図に示す．球の比誘電率が大きくなるに従って，球内部の電界が小さくなっていく様子が分かる．



ポテンシャル　　Er ($\varepsilon_r = 1$)　　Er ($\varepsilon_r = 2$)　　Er ($\varepsilon_r = 3$)



ポテンシャルの３次元表示

例題3-2　x 方向を向いた一様な静電界の中の原点に半径aで誘電率εの誘電体球をおいた場合，誘電体内外の電界を求めよ．

一様電界中の誘電体球の問題は軸対称であり，φ座標に無関係であることから(3.2)のmは$m=0$である．また，$\theta=0,\pi$で有限であることから，(3.6)で$Q_n^m(\cos\theta)$は不要となる．したがって，展開関数としては

$$R(r)=A_n r^n+B_n r^{-n-1} \qquad \vartheta(\theta)=C_n^m P_n^m(\cos\theta)$$

一様電界を与える電位は

$$\phi_0=-E_0\,x=-E_0\,r\cos\theta=-E_0\,r\,P_1(\cos\theta)$$

とおくことができる．

そこで，球内外の電位を次のようにおく．

$$\phi=\phi_1^-,\quad r<a \qquad \phi=\phi_0+\phi_1^+,\quad r>a$$

ここで，$\phi_1^{\pm}$は誘電体球によって生ずる電位でラプラスの方程式　$\nabla^2\phi_1^{\pm}=0$

を満たしている．

$r=a$で　ポテンシャルの連続性，電束密度の法線成分の連続性から境界条件は

$$\phi_1^-=\phi_0+\phi_1^+,\quad (at\ \ r=a)$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial r}\phi_1^-=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial r}\left(\phi_0+\phi_1^+\right),\quad (at\ \ r=a)$$

印加電位が角度θについて，$\cos\theta=P_1(\cos\theta)$であるから，境界条件を満たす$\phi_1^{\pm}$も同様な関数でなければならない．

また，無限遠で電位が0にならなければならないので，　$\phi_1^+=\dfrac{B_1}{r^2}\cos\theta$

原点で発散しないためには　$\phi_1^1=A_1\,r\cos\theta$

したがって，$-E_0\,a+\dfrac{B_1}{a^2}=A_1\,a$ 　　　$-\varepsilon_0\quad E_0\,a+\dfrac{2B_1}{a^3}\quad=\varepsilon A_1$

$$A_1=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0 \qquad B_1=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}a^3E_0$$

それゆえ，　$\phi_0+\phi_1^+=-E_0\,r\cos\theta+\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}a^3E_0\dfrac{\cos\theta}{r^2}$ 　　$\phi_1^-=\dfrac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\,r\cos\theta$

となり，誘電体内では　$E^-=\dfrac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0$　となって一様である．