ポアソンの方程式とラプラスの方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \nabla\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E} = -\varepsilon_0\nabla\cdot\nabla V = -\varepsilon_0\nabla^2 V = \rho_v$$

$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$　　$\boldsymbol{E} = -\nabla V$

Poisson's equation　$\nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon_0}$

Laplace's equation　$\nabla^2 V = 0$　$(\rho_v = 0)$

電位 V に関する２階の微分方程式

この方程式を境界条件のもとで解くことにより

V の連続性
D_n の連続性

V が求まり，$\boldsymbol{E} = -\nabla V$ から電界が求められる。

電界を求める第４の方法

ラプラシアン演算子について

ベクトル解析も参照

$$\nabla \cdot \nabla V = \left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

div grad V

$$= \nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

形式的に内積

直角座標

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

一見複雑そうに見えるが
１つの変数の問題が多い

円筒座標

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

球座標

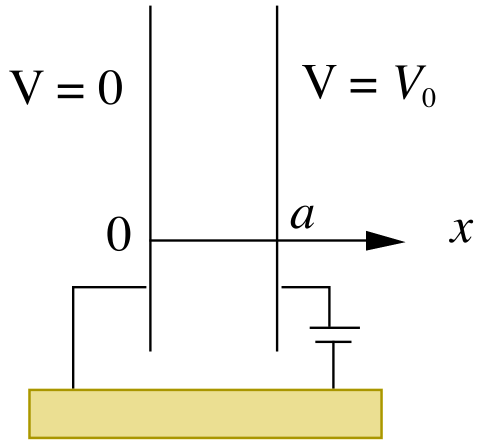
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

例１　図のような２枚の平行平板に電位差　V_0 を与えたとき，ラプラスの方程式からｘ方向の電位と電界を求めてみよう。

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

ｘ方向のみの変化

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$



$$\frac{dV}{dx} = C$$

$$V = Cx + D$$

C, Dは未定定数

境界条件として

$x = 0$　で　V = 0　→　$D = 0$

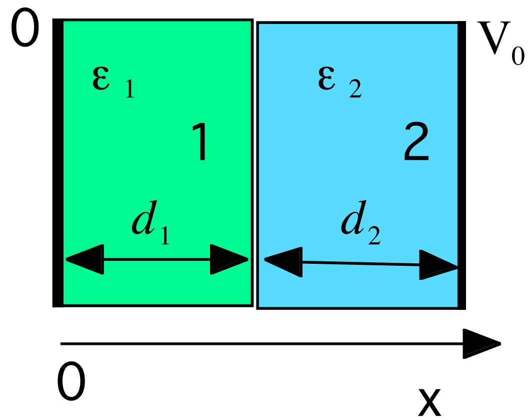
$x = a$　で　V = V_0　→　$V_0 = Ca$

したがって

$$V = \frac{V_0}{a} x$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{dV}{dx}\boldsymbol{a}_x = -\frac{V_0}{a}\boldsymbol{a}_x$$

極板間の面積が十分大きい平行平板コンデンサの電極間に，図のように誘電率　ε1　ε2 の誘電体をはさみ，電位差 V_0 を印加したとき，誘電体中の電位・電界を求めよう



$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

ε1 中で

$$V_1 = a_1 x + b_1$$

ε2 中で

$$V_2 = a_2 x + b_2$$

境界条件

$$V_1 = 0 \quad (at\ \ x=0)$$

$$V_2 = V_0 \quad (at\ \ x = d_1 + d_2)$$

$$V_1 = V_2 \quad (at\ \ x = d_1)$$

$$\varepsilon_1 \frac{dV_1}{dx} = \varepsilon_2 \frac{dV_2}{dx}$$

⇨

$$a_1 = \frac{V_0}{d_1 + \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2}$$

$$a_2 = \frac{V_0}{d_2 + \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} d_1}$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = \frac{d_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) V_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

⇨

$$V_1 = \frac{\varepsilon_2 V_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} x$$

$$V_2 = \frac{\varepsilon_1 \left(x - d_1\right) + d_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} V_0$$

$$E_{x1} = \frac{-\varepsilon_2 V_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

$$E_{x2} = \frac{-\varepsilon_1 V_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

例 2　球対称の問題では，ｒのみの微分方程式となる。ここでは，半径aの誘電体球に電荷密度ρ_vが一様に分布しているとき，電位Ｖを求めてみよう。

ＶをV_1とV_2に分ける

球内部　V_1

$$\nabla^2 V_1 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV_1}{dr}\right) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV_1}{dr}\right) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_1} r^2$$

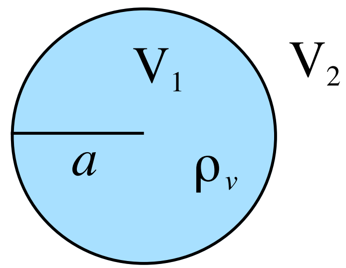
$$r^2 \frac{dV_1}{dr} = -\frac{\rho_v}{3\varepsilon_1} r^3 + C_0$$

$$\frac{dV_1}{dr} = -\frac{\rho_v}{3\varepsilon_1} r + \frac{C_0}{r^2}$$

$$V_1 = -\frac{\rho_v}{6\varepsilon_1} r^2 - \frac{C_0}{r} + C_1$$

$r = 0$　で有限　　$C_0 = 0$

$$\therefore\ V_1 = -\frac{\rho_v}{6\varepsilon_1} r^2 + C_1$$



$C_0 \sim C_3$ は未定定数

球外部　V_2

$$\nabla^2 V_2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV_2}{dr}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV_2}{dr}\right) = 0$$

$$r^2 \frac{dV_2}{dr} = C_2$$

$$\frac{dV_2}{dr} = \frac{C_2}{r^2}$$

$$V_2 = -\frac{C_2}{r} + C_3$$

$r = \infty$　で　$V_2 = 0$　　$C_3 = 0$

$$\therefore\ V_2 = -\frac{C_2}{r}$$

続く

$r=a$ で　境界条件　$V_1=V_2$ より　$-\frac{\rho_v}{6\varepsilon_1}a^2+C_1=-\frac{C_2}{a}$　　$C_1=\frac{\rho_v a^2}{6\varepsilon_1}+\frac{\rho_v a^2}{3\varepsilon_2}$

$\varepsilon_1\frac{dV_1}{dr}=\varepsilon_2\frac{dV_2}{dr}$ $(D_{n1}=D_{n2})$ より　$-\frac{\rho_v}{3}a=\varepsilon_2\frac{C_2}{a^2}$　　$C_2=-\frac{\rho_v a^3}{3\varepsilon_2}$

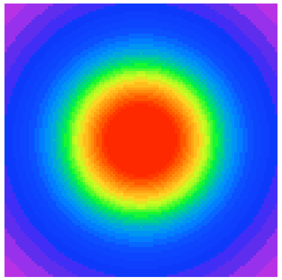
$$\therefore V_1=\frac{\rho_v}{6\varepsilon_1}\left(a^2-r^2\right)+\frac{\rho_v a^2}{3\varepsilon_2} \qquad V_2=\frac{\rho_v a^3}{3\varepsilon_2}\frac{1}{r}$$

さて，半径 a の球に含まれる総電荷は $Q=\frac{4\pi a^3}{3}\rho_v$ だから，書き換えると

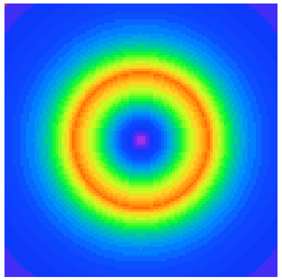
$$V_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{a^2-r^2}{2a^3}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\frac{1}{a} \qquad \mathrm{V}_2=\frac{\rho_v a^3}{3\varepsilon_2}\frac{1}{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\frac{1}{r}$$

$$E_{r1}=-\frac{\partial V_1}{\partial r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{r}{a^3} \qquad E_{r2}=-\frac{\partial V_2}{\partial r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\frac{1}{r^2}$$

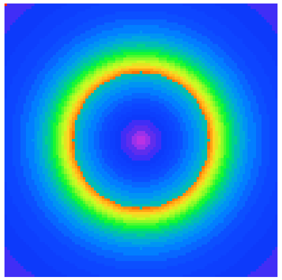
ガウスの法則から得られる式と全く同じ式



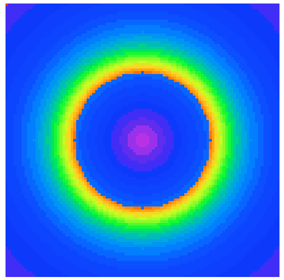
電位



$E_r\ (\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=1)$



$E_r\ (\varepsilon_1=2, \varepsilon_2=1)$



$E_r\ (\varepsilon_1=3, \varepsilon_2=1)$

影像法

　ポテンシャルや電界は，本来，与えられた境界条件のもとでLaplace, Poissonの方程式を解いて求められるものであるが，境界が複雑な形状をしていたり，媒質が誘電体や金属を含む種々の媒質から構成されている場合，必ずしも簡単に解は得られない。むしろ，解を得ることが非常に希である。そのような状況の中で，境界条件として分かっていることは

境界におけるポテンシャルの連続性

境界における電束密度の法線成分の連続性

境界における電界の接線成分の連続性

金属表面では電界の接線成分が０，

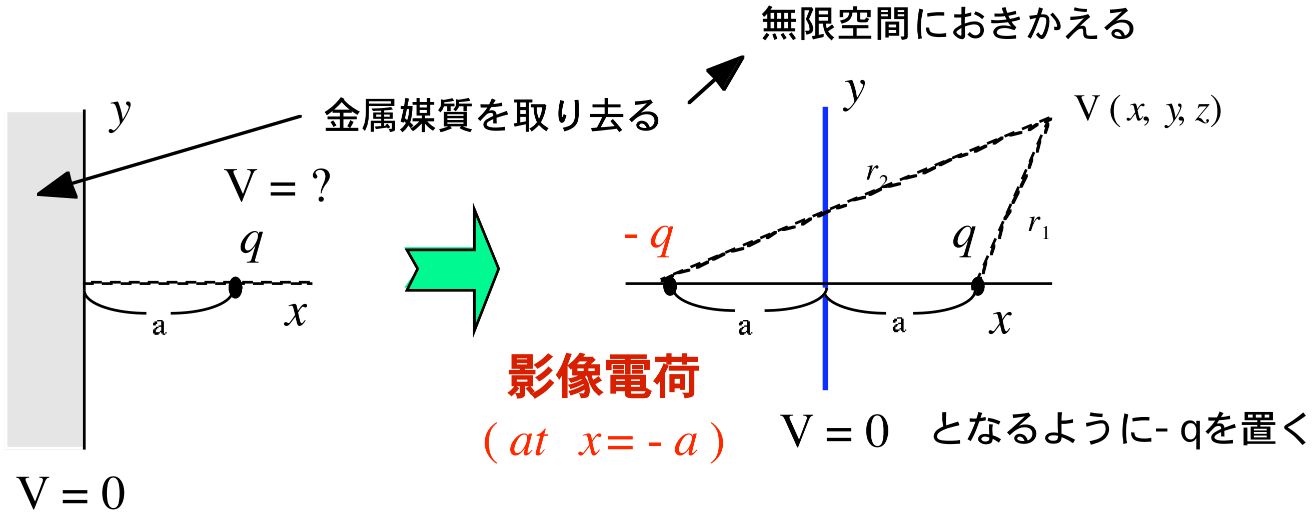
　　したがって電界は法線成分しかない。

金属内部では電界は０，

　　そのため金属全体にわたってポテンシャルは一定。

　これらの境界条件を利用して，境界が特別な形状をしているときは，Laplace, Poissonの方程式を解かなくても，次の影像法を使って場を求めることができる。

図に示すような金属(x<0)と誘電体(0<x)からなる空間に点電荷 q があったとしよう。このときの右側の誘電体の半無限空間で電位と電界を求める問題を考えてみる。境界条件として金属表面は０電位とする。



境界のある半無限空間のため,
微分方程式を直接解けない

電位はqと鏡像の位置にある- qとの和

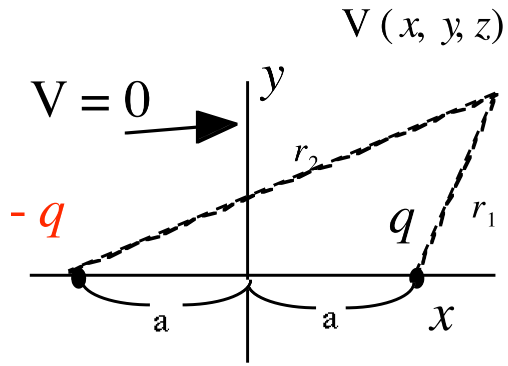
$$V(x,\ y,\ z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right\}$$

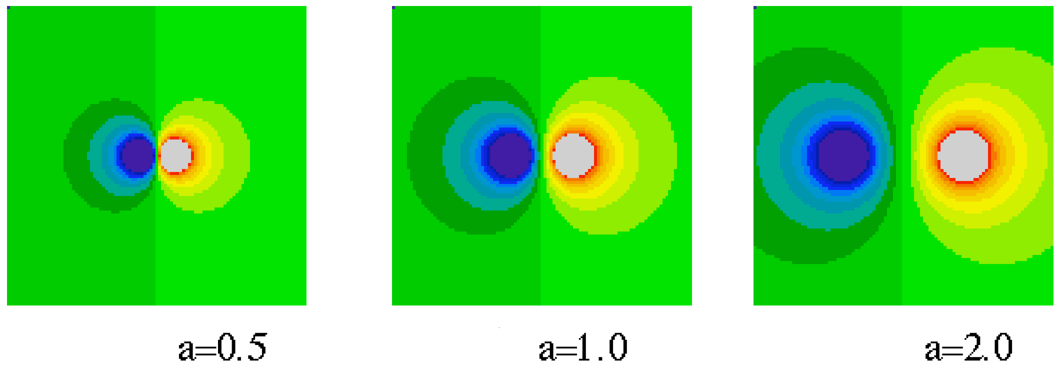
(無限空間なので)

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}}\right\}$$

境界条件を満たす $\Leftarrow$

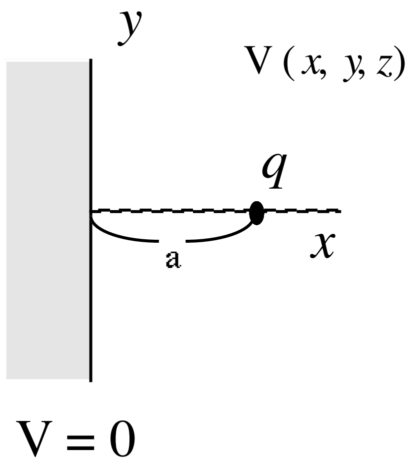
$V = 0$ ($at\ \ x = 0$)

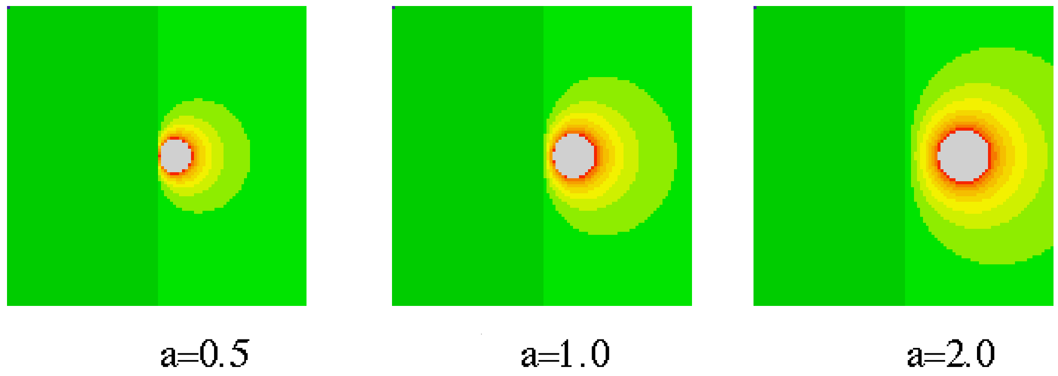




$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right\}$$ による電位

$0 < x$　でのみ有効





実際の分布　　$0 < x$ でのみ存在

電界は電位の勾配　$\boldsymbol{E} = -\nabla V$

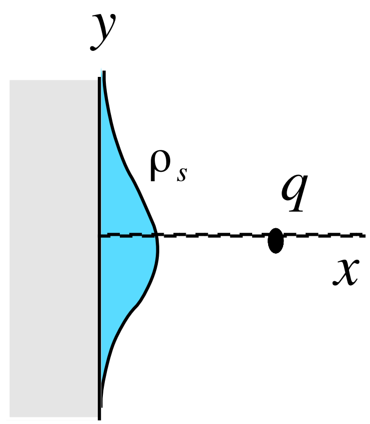
$$E_x(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{x-a}{\left[(x-a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{x+a}{\left[(x+a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$E_y(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{y}{\left[(x-a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{y}{\left[(x+a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}$$

金属面上の表面電荷分布

$$\rho_s = D_n = D_x\big|_{x=0} = \varepsilon E_x(0, y, z) = \frac{-q}{2\pi}\frac{a}{\left[a^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

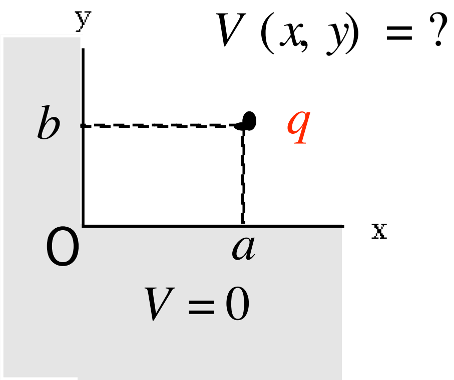
負の電荷が現れる



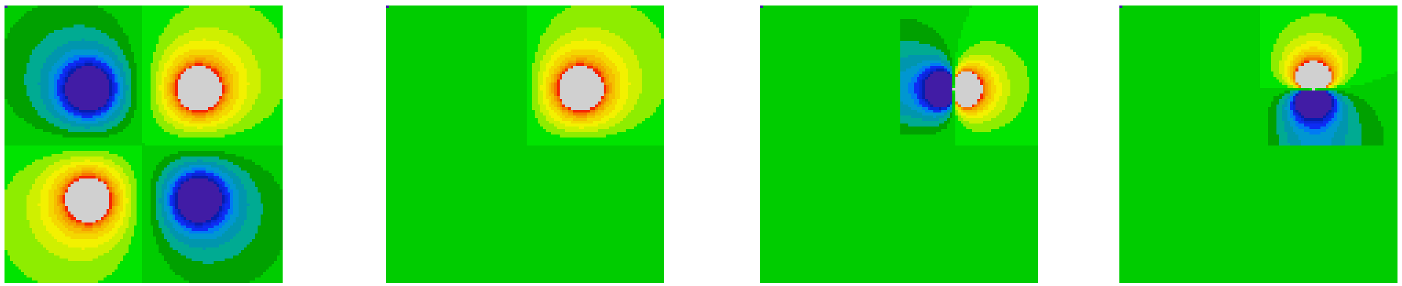
V = 0

Comprehension check

図のような直角コーナーの右上の空間の点 $(a\,,b)$ に点電荷 q が置かれた場合，電位分布と電界を影像法を使って求めよ。



図解



影像法による電位分布　　実際の電位分布　　E_x　　E_y