

ガウスの法則

C. F. Gauss ドイツの数学者

クーロン力による電界

一般には積分形

実際の積分実行は困難

電界を求める第2の方法

コンピュータの利用

点対称，球対称，線対称の電荷分布ではガウスの法則が便利

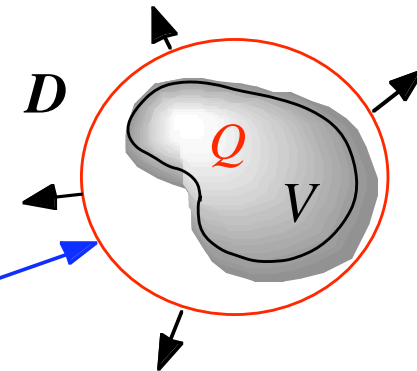
全電束 = 閉曲面内の全電荷

閉曲面：風船の表面，ボールの表面など，
ある体積を囲み，閉じた曲面

(任意に閉曲面が選べる—>どのように選ぶかが重要)

電荷分布が分かれば，電束から電界が求められる

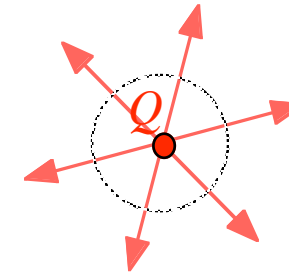
逆に体積の表面の電束を調べれば，内部の電荷量が分かる



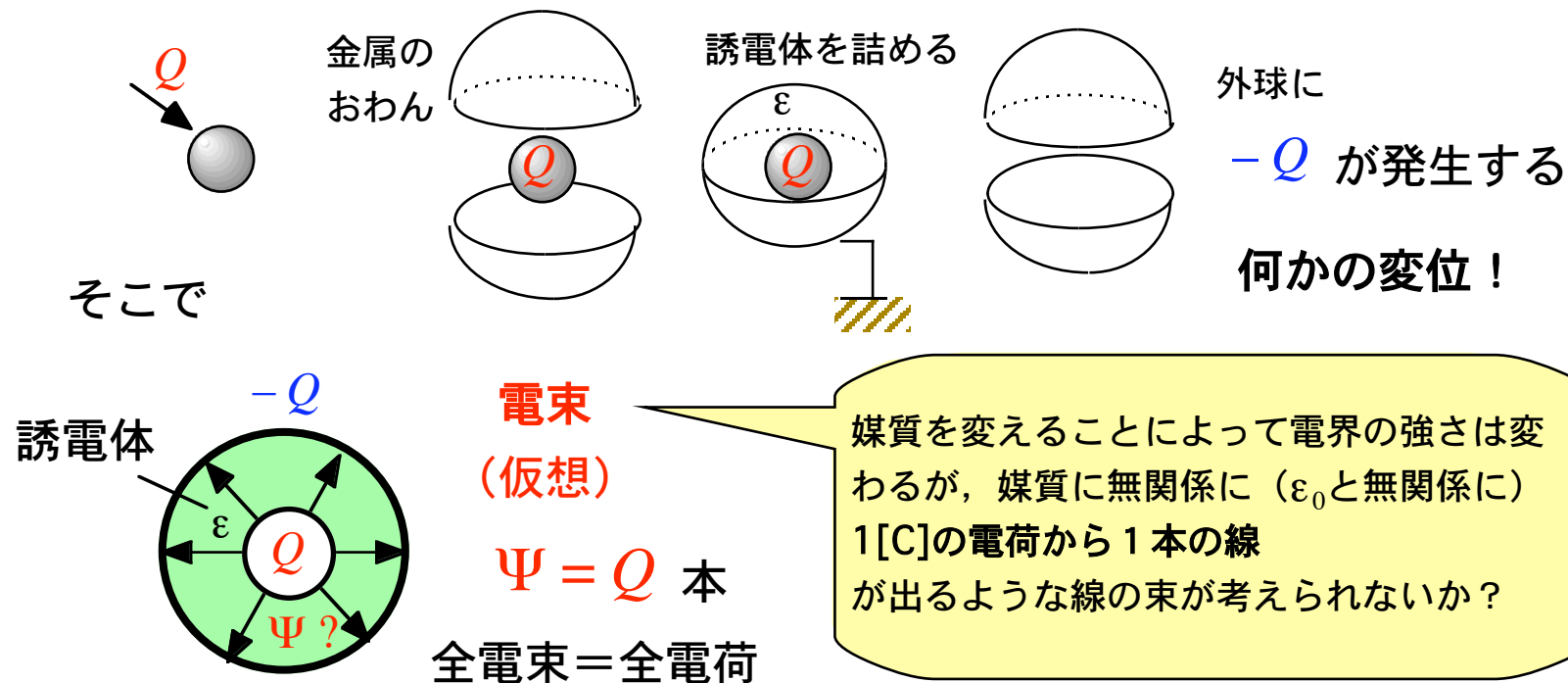
自由空間（誘電率が ϵ_0 の媒質）におかれた電荷 Q による電気力線

単位球面上での密度 $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l^2}$ [本/ m^2]

球表面を出ていく総数 $N = \frac{Q}{\epsilon_0}$ 本
として考えた



ところが，Michael Faraday (UK)の実験事実（1873年頃）

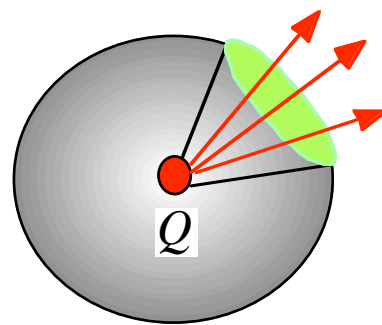


電束密度の導入

何かの変位！ 全電束＝全電荷 $\Psi = Q$ 1[C]の電荷から1本の線

電束密度 D ：単位面積あたりの電束数 $D = \frac{\Psi}{S}$ 本

Displacement
変位



単位球表面では密度

$r = 1$

$$D = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} = \frac{Q}{4\pi \cdot 1^2}$$

電界は $E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \cdot 1^2}$ であった

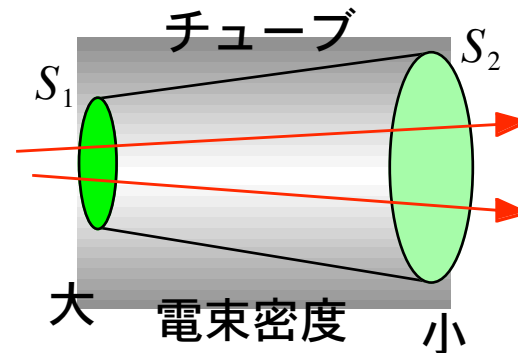
電界との対比

$$D = \epsilon_0 E$$

Vector化

$$D = \epsilon_0 E$$

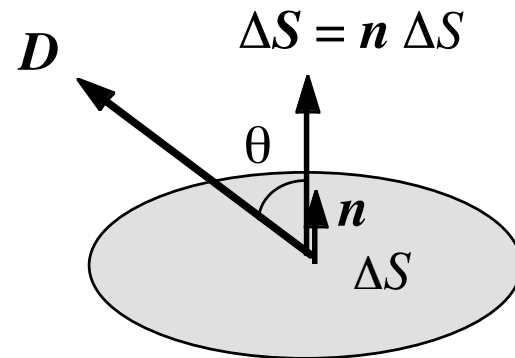
自由空間中では
上記の関係が成り立つ



チューブの中の電束数は一定

電束について (電束密度を使った全電束の表現)

面 ΔS を通過する電束を $\Delta\Psi$



面の法線方向 n と D の方向が違う場合も考慮

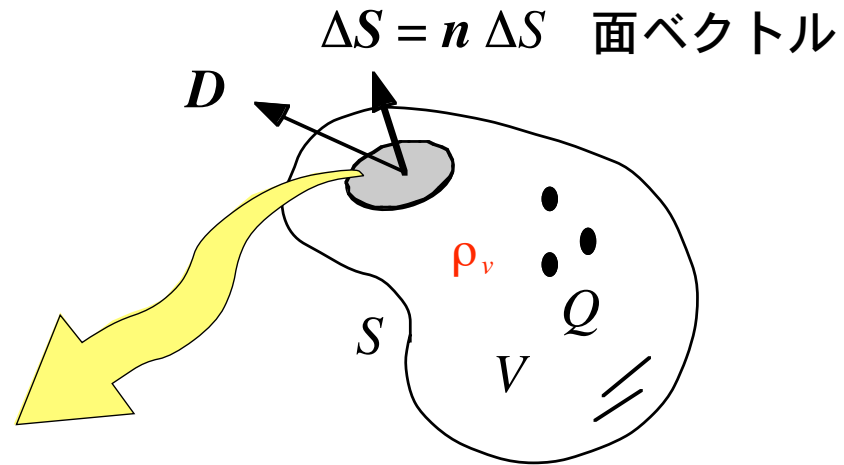
$$\Delta\Psi = D \cdot \Delta S = D \cdot n \Delta S = D \Delta S \cos \theta$$

内積

通過する電束

もし $\theta = 0 \implies \Delta\Psi = D \Delta S$

$\theta = \frac{\pi}{2} \implies \Delta\Psi = 0$



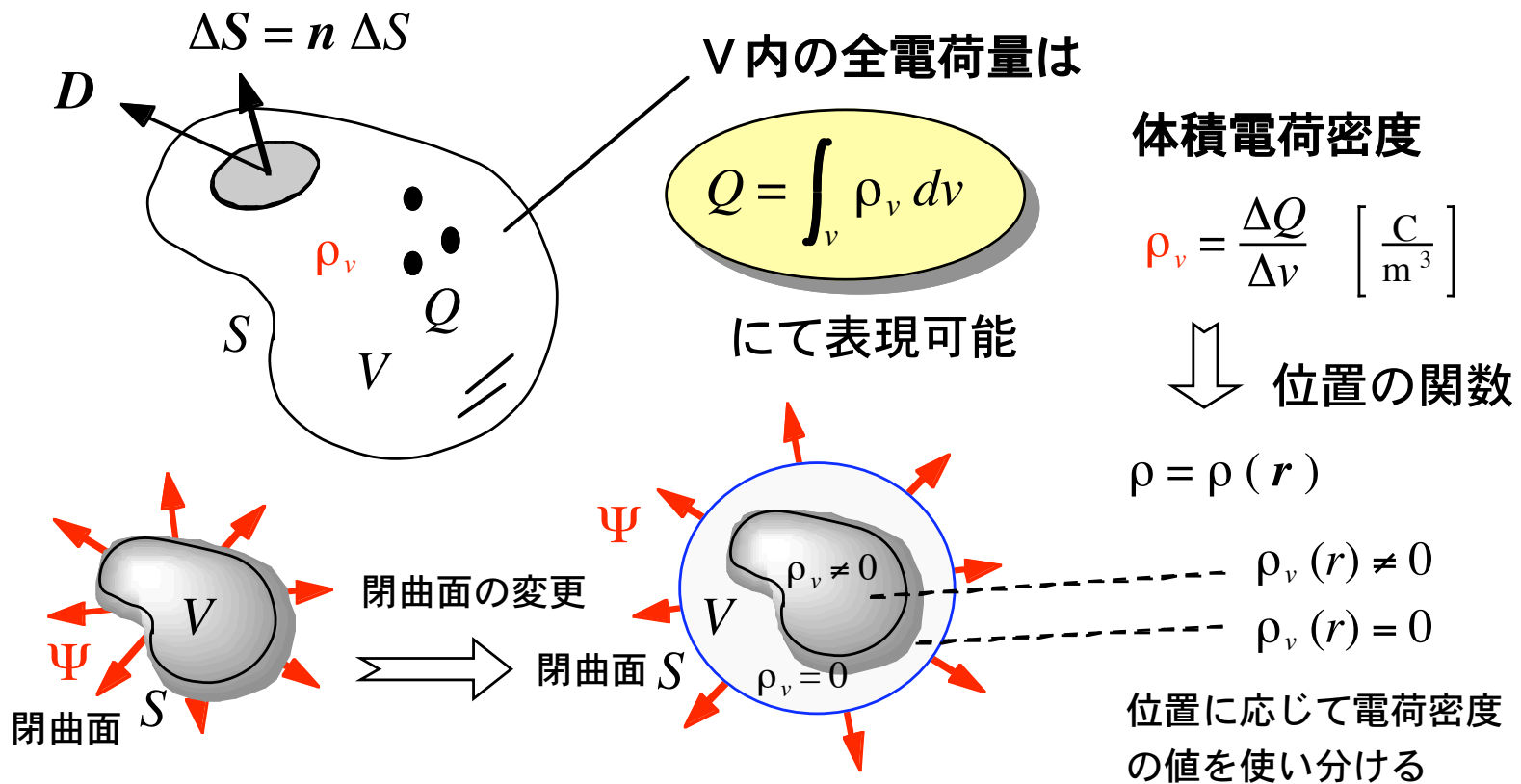
S上で総和

閉曲面を通過する全電束

$$\Psi = \oint_S D \cdot dS = \oint_S D \cdot n dS$$

閉曲面にわたる面積積分

電束と電荷の関係について



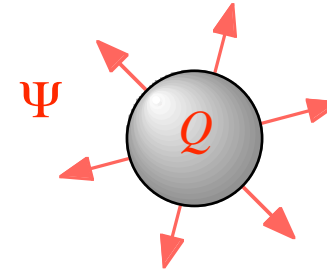
閉曲面を通過
する全電束

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_v \rho_v dv$$

Q は閉曲面内の
全電荷量

ガウスの法則（積分形） Law

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_v \rho_v dv = Q$$



任意の閉曲面を通して外部に出ていく全電束はその閉曲面内に含まれる全電荷Qに等しい。

全電束 = 全電荷

★ 閉曲面表面の電束を調べれば、
内部の電荷量が分かる $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow Q = \int_v \rho_v dv$ 例 1

★ 電荷分布が分かれば、
電束と電界が求められる $Q = \int_v \rho_v dv \Rightarrow \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 例 2 - 5

例題 1 原点の点電荷 Q に対してガウスの法則を確認 (球座標系)

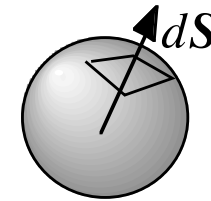
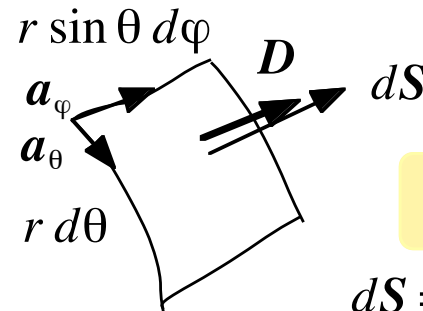
全電束 $\Rightarrow$ 全電荷 になっているか？ 考え方は正しいか？

原点を取り囲む半径 r の球面上で、電界から導かれる電束は

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

球面の r 方向の面素 dS は？

線素 $\times$ 線素



$$dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, \mathbf{a}_r$$

$$dS = \underbrace{r \, d\theta \, \mathbf{a}_\theta}_{\text{線素}} \times \underbrace{r \sin \theta \, d\varphi \, \mathbf{a}_\varphi}_{\text{線素}}$$

面積積分について (dS を通る電束)

$$\mathbf{D} \cdot dS = \frac{Q}{4\pi r^2} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad r \text{ 方向成分のみの寄与}$$

全電束は

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot dS = \iint_S \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{4\pi} \cdot 2 \cdot 2\pi = Q$$

電荷
になっている

例題 1 続き

前頁で原点の点電荷 Q に対してガウスの法則を確認した

全電束 $\Rightarrow$ 全電荷 になっている (電界から電荷を求めた)

これから逆に, (電荷から電界を求めたい)

電荷 $\Rightarrow$ 電束 $\Rightarrow$ 電界 が求められないか?
 Q D $E = \frac{D}{\epsilon_0}$

いろいろな分布形態がある。

点電荷

面電荷

体積電荷

分布形状も様々

放射状になることは知っている

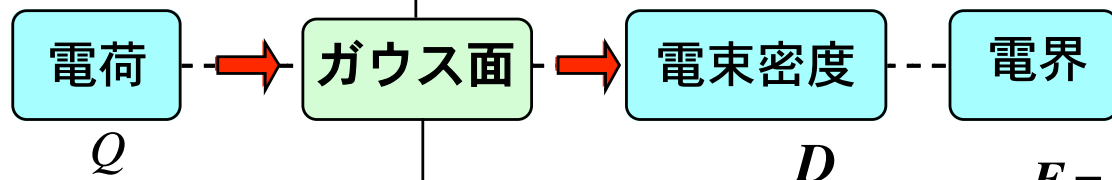
閉曲面をどのように
取るか?

ガウス面

積分を行う際に都合の良い面

ガウス面の取り方

電荷を取り囲む整った形で閉じた面



ガウス面の取り方

D が

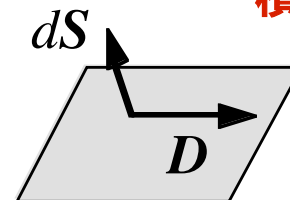
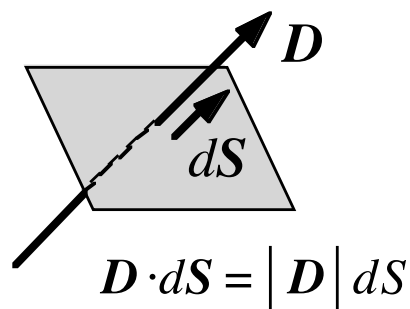
面に垂直

D が

面に平行

となるように選ぶと
積分が簡単に行える

$|D|$ が一定と
となるような面



(2 ベクトルが直交)

内部電荷 $Q = \oint_S D \cdot dS = \int_{S_{\perp}} D \cdot dS + \int_{S_{\parallel}} D \cdot dS$

面を分割 $= \int_{S_1} |D| dS_1 + \int_{S_2} |D| dS_2 + \dots + 0 + 0$

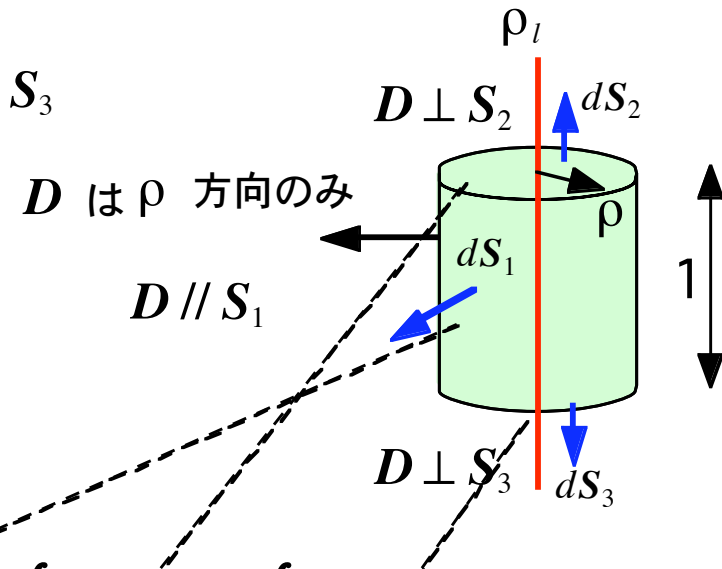
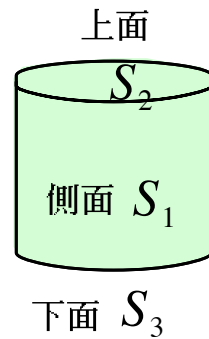
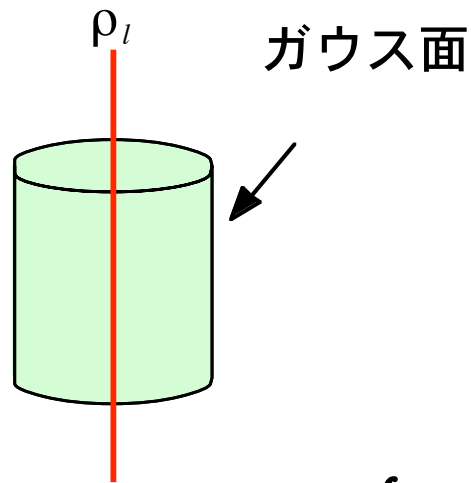
面を分割

例2 無限長線電荷（線電荷密度 ρ_l ）による電界を求める

対称性を考慮して，半径 ρ
の閉曲面（ガウス面）を選ぶ

閉曲面は

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$



内部に含まれる電荷 $Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_3} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$

$\rho_l \times 1 = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} |\mathbf{D}| dS_1 + \int_{S_2} 0 + \int_{S_3} 0$ (ベクトルの直交性より)

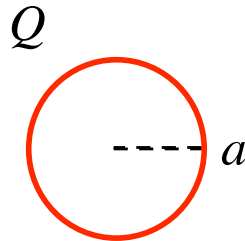
$\rho_l = D_\rho 2\pi\rho \times 1$

$$\therefore D_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\rho} \quad D = \frac{\rho_l}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

例 3 半径aの球殻全体に電荷Qを与えた場合の電界

点対称となる $\Rightarrow$ 同じ距離では、同じ大きさが予想される

ガウス面の取り方



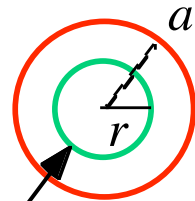
半径 r の球面でできたガウス面を作ってみよう

この場合のガウス面 = r 一定の球面

球座標系が便利

球の内部

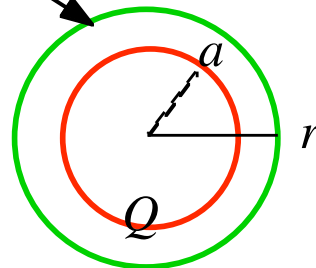
$$r < a$$



ガウス面

球の外部

$$a < r$$



$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r 4\pi r^2 = 0$$

$$D_r = \epsilon_0 E_r = 0$$

$$E = 0$$

電荷を囲んでいない

電束

内部に含まれる
全電荷

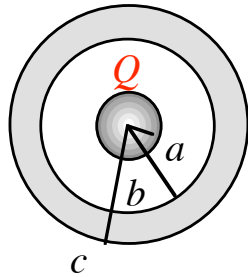
$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r 4\pi r^2 = Q$$

$$D_r = \epsilon_0 E_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

Qを囲んでいる

例 4 孤立した導体同心球の内球に電荷 Q を与えたときの電界分布



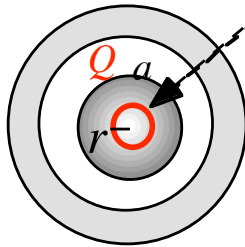
$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (\text{基本式})$$

ガウス面は？

ガウス面に囲まれた内部の電荷の量に着目して

この場合のガウス面
r 一定の面

$r < a$



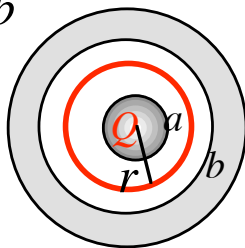
何も囲んでいない

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r 4\pi r^2 = 0$$

$$D_r = \epsilon_0 E_r = 0$$

$$E = 0$$

$a < r < b$

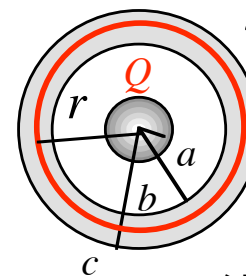


Qを囲んでいる

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r 4\pi r^2 = Q$$

$$D_r = \epsilon_0 E_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$



$b < r < c$

Qを囲んでいるが

導体内部では
媒質としての条件から
 $E = 0$ (後出)

その結果, $D = 0$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

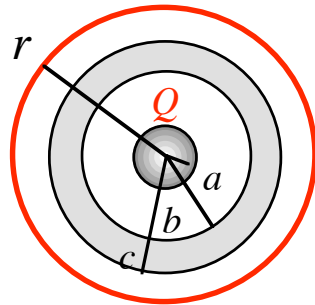
により, ガウス面内の総電荷は
0でなくてはならない

したがって, $r = b$ の面に $-Q$ の電荷が
発生していなければならない。

続く

孤立した導体同心球の内球に電荷 Q を与えたときの電界分布（続き）

$$c < r$$



$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r 4\pi r^2 = Q$$

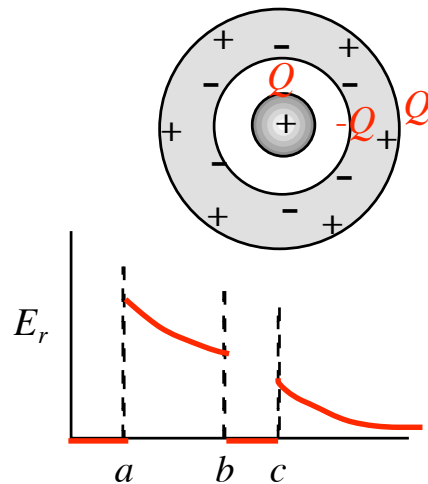
内部には Q しか与えていない

$$D_r = \epsilon_0 E_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

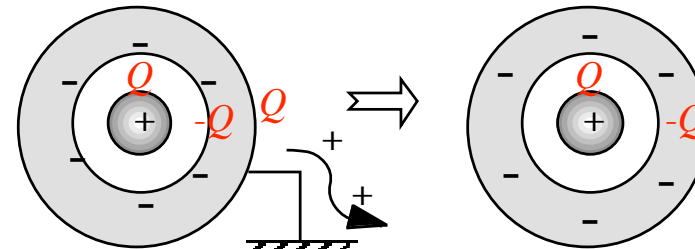
Q を囲んでいる

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

その結果、電荷分布は下図のようにならなければならない



もし、外球を接地した後、分離したら



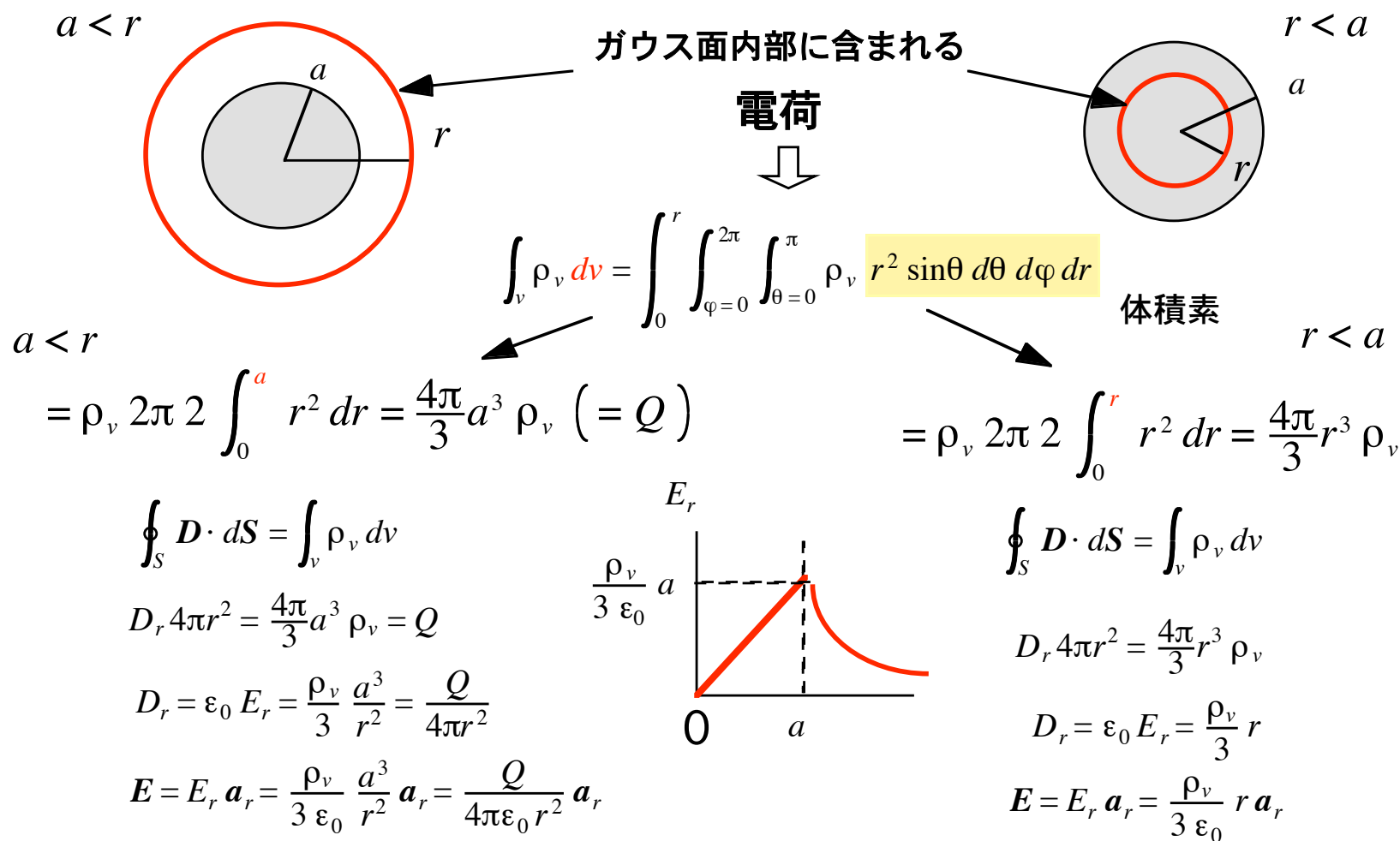
シールド

内部にいかなる電荷を与えても外部に影響無し

外球には $-Q$

Michael Faradayの実験

例5 一様な体積電荷密度 ρ_v をもつ半径 a の球からの電束密度と電界

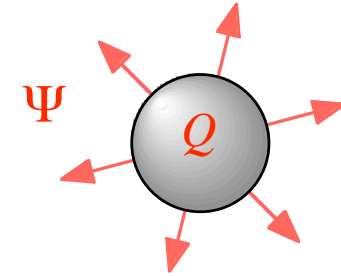


後続く

ガウスの法則（積分形から微分形へ）

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_v \rho_v dv = Q$$

積分形



任意の分布に対応可能となるよう、
各点で成立するように変更できないか？

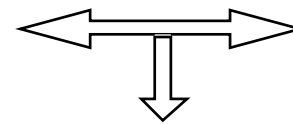
微分形へ移行するためには

ガウスの発散定理

Theorem

定理と法則は別物！

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$



$$Q = \int_v \rho_v dv$$

全電束

ベクトル解析参照

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_v \rho_v dv$$

全電荷

ガウスの法則（微分形）

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

各点で成り立つ

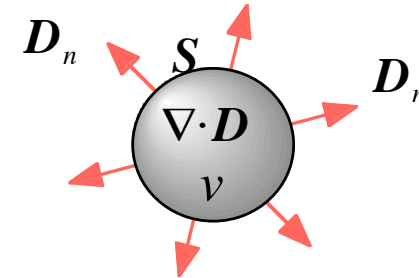
ガウスの発散定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

面積積分と体積積分

$\nabla \cdot \mathbf{D}$ 発散 : divergence

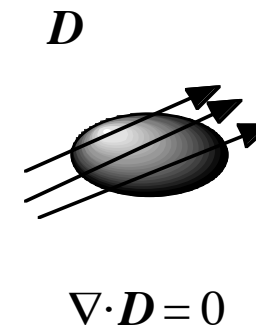
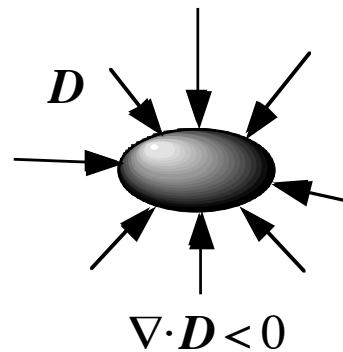
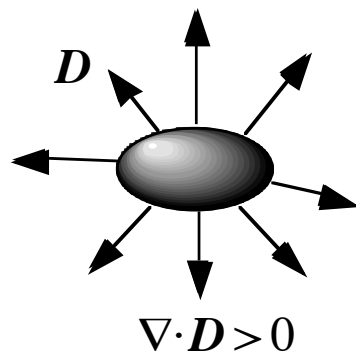
Theorem



閉曲面にわたるベクトルの法線成分の積分
= 閉曲面で囲まれた体積内のベクトルの発散の積分

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

微小体積を囲む閉曲面の法線方向のベクトルの変化割合の和を示している。それが正であればベクトルの大きさが増加していると考えられる。つまり、その微小体積（あるいは点）から何らかの原因でベクトル量が湧き出ていることになる。一方、負であれば減少していることになり、ブラックホールのように吸い込んでいると考えることができる。したがって、ある点でベクトルの発散を調べることは、ベクトル量の湧き出し（吸い込み）があるかないかを調べることに相当している。もし、発散が0であれば、湧き出し（吸い込み）が無いことになり、はじめから0か、あるいは出ていく量と入ってくる量が等しいことを意味している



$\nabla \cdot \mathbf{D}$ 発散 : divergenceの定義式

ベクトル解析も参照

各座標系での表現

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

直角座標

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z \right)$$

$$\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

形式的に内積

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{\partial D_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

円筒座標

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (D_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$$

球座標

ガウスの法則 (微分形)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

各種座標系で成立

ベクトル表記の優位性

電束密度 $\longleftrightarrow$ 体積電荷密度

一様な体積電荷密度 ρ_v をもつ半径 a の球からの電界
(ガウスの法則, 例 5 からの続き)

$$\begin{aligned} r < a & \quad D_r = \frac{\rho_v}{3} r \\ a < r & \quad D_r = \frac{\rho_v}{3} \frac{a^3}{r^2} \end{aligned}$$

各点で

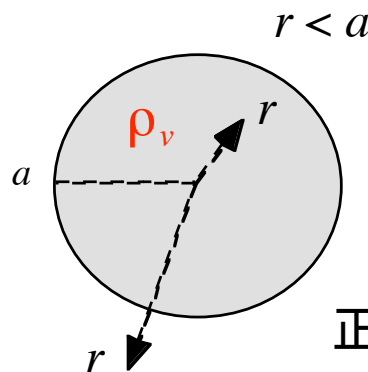
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

を満たしているか？

球座標での発散 (r 方向のみ)

ベクトル解析参照

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 D_r)$$



$r < a$ 球内部 (電荷のある領域)

$$D_r = \frac{\rho_v}{3} r$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\rho_v}{3} r \right) = \rho_v$$

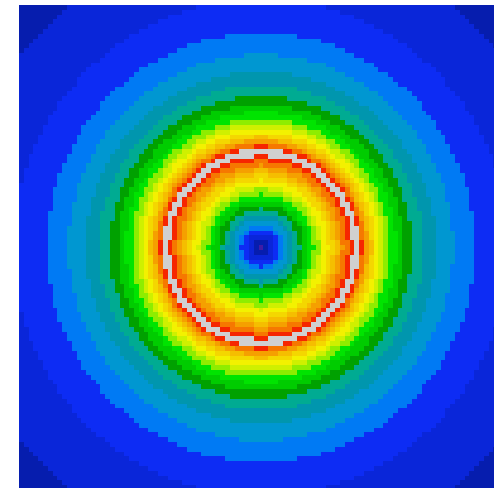
正の値を持つので湧き出しあり

$a < r$ 球外部 (電荷の無い領域)

$$D_r = \frac{\rho_v}{3} \frac{a^3}{r^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\rho_v}{3} \frac{a^3}{r^2} \right) = 0$$

湧き出しは無い



E, D の強度分布

(座標系選択の重要性)

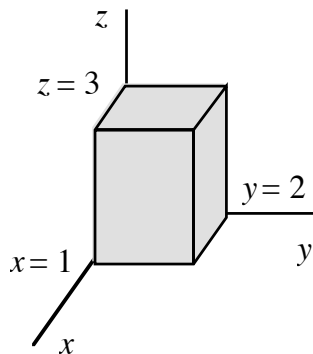
各点で $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ 満たしている

発散定理の確認

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv$$

図の6面体で発散定理を適用

ベクトル場 $\mathbf{A} = 2xy \mathbf{a}_x + x^2 \mathbf{a}_y + 0 \mathbf{a}_z$ とする



$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{z=0}^3 \int_{y=0}^2 \mathbf{A}_{x=0} \cdot (-\mathbf{a}_x dy dz) + \int_{z=0}^3 \int_{y=0}^2 \mathbf{A}_{x=1} \cdot (\mathbf{a}_x dy dz) +$$

面積積分 $\int_{z=0}^3 \int_{x=0}^1 \mathbf{A}_{y=0} \cdot (-\mathbf{a}_y dx dz) + \int_{z=0}^3 \int_{x=0}^1 \mathbf{A}_{y=1} \cdot (\mathbf{a}_y dx dz)$

$$= \int_{z=0}^3 \int_{y=0}^2 \mathbf{0} \cdot (-\mathbf{a}_x dy dz) + \int_{z=0}^3 \int_{y=0}^2 (2y \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y) \cdot (\mathbf{a}_x dy dz) +$$

$$\int_{z=0}^3 \int_{x=0}^1 x^2 \mathbf{a}_y \cdot (-\mathbf{a}_y dx dz) + \int_{z=0}^3 \int_{x=0}^1 (2x \mathbf{a}_x + x^2 \mathbf{a}_y) \cdot (\mathbf{a}_y dx dz)$$

$$= 0 + \int_{z=0}^3 \int_{y=0}^2 2y dy dz - \int_{z=0}^3 \int_{x=0}^1 x^2 dx dz + \int_{z=0}^3 \int_{x=0}^1 x^2 dx dz$$

$$= \int_{z=0}^3 \int_{y=0}^2 2y dy dz = 3 \left[y^2 \right]_0^2 = 12$$

体積積分

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} 2xy + \frac{\partial}{\partial y} x^2 + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 2y$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \int_V 2y dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^2 2y dy \int_0^3 dz = 12$$

一致