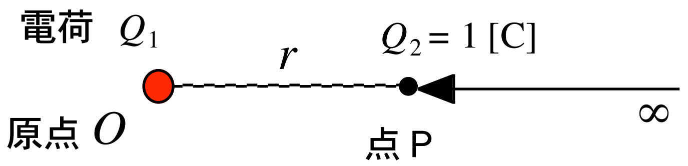
静電界のエネルギーと密度について

Q_1 による電界中で外部の力によって単位電荷を動かす

$Q_2 = 1$ [C] のとき

外部からの仕事が必要 ⇒ **電位の定義へ**



点Ｐでの電位は

$$V_P(\boldsymbol{r}) = -1 \cdot \int_{\infty}^{r} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

クーロン力に逆らって単位電荷を ∞ から点Ｐまで動かす

Q_1 による電界

★ クーロン力に逆らって点Ｐで単位電荷を静止させておく

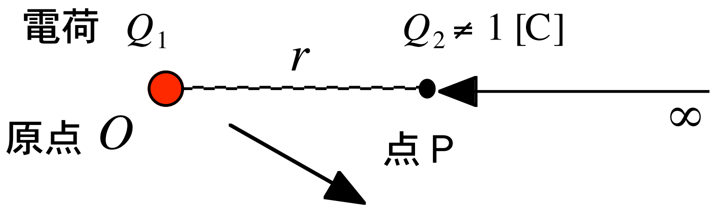
外部からの仕事　＝　位置エネルギーとして保持

外部の力を取り去ると，クーロン力によって遠ざかる

位置エネルギー ⇒ 運動エネルギーへかわる

電位と位置エネルギー

（最終的には電界によってエネルギを表現したい）



$\boldsymbol{E}$ は Q_1 による電界

電荷 Q_1 があったとき

Q_2 を無限遠から P まで運ぶために必要な仕事は

$$W = -\int_{\infty}^{r} \underbrace{Q_2\,\boldsymbol{E}}_{\text{クーロン力}} \cdot \underbrace{d\boldsymbol{l}}_{\text{距離}}$$

$$W = -\underbrace{Q_2}_{Q_2\text{を運ぶ}} \cdot \int_{\infty}^{r} \underbrace{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}_{Q_1\text{による電界}} dr = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = Q_2 V_{2,1} \Rightarrow Q_2\text{の位置エネルギーとなる}$$

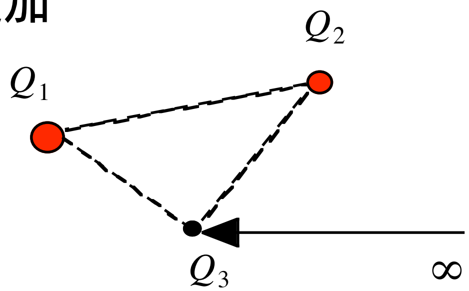
Q_1 によって Q_2 の位置にできる電位

$$V_{2,1} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

したがって

$$Q_2\text{の位置エネルギー} = Q_2 \times Q_2\text{の電位} = Q_2 V_{2,1} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = Q_1 V_{1,2}$$

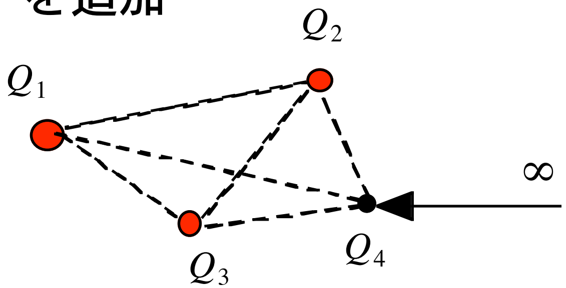
Q_3 を追加



$Q_2 V_{2,1}$

$Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$ の仕事が新たに必要

さらに Q_4 を追加



$Q_2 V_{2,1}$

$Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$

$Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$

の仕事が新たに必要

n 個を追加すると $Q_2 V_{2,1}$

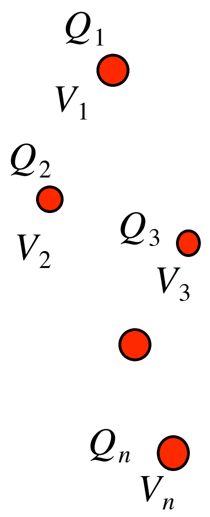
$Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$

$Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$

$\vdots$ .....

$Q_n V_{n,1} + Q_n V_{n,2} + Q_n V_{n,3} + \ldots\ldots + Q_n V_{n,n-1}$ 順次増える

全体の和Wを求めよう



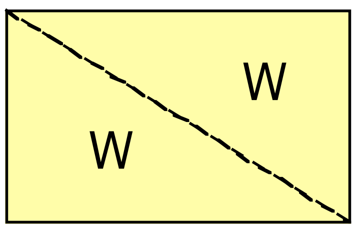
$$
\begin{array}{l}
\boxed{\begin{array}{l} Q_2\,V_{2,1} \\ Q_3\,V_{3,1} \\ Q_4\,V_{4,1} \\ \vdots \\ Q_n\,V_{n,1} \end{array}}
\begin{array}{l} \\ +Q_3\,V_{3,2} \\ +Q_4\,V_{4,2}+Q_4\,V_{4,3} \\ \quad\quad \ldots\ldots \\ +Q_n\,V_{n,2}+Q_n\,V_{n,3}+\ldots\ldots+Q_n\,V_{n,n-1} \end{array}
\end{array}
$$

$$Q_3\,V_{3,1}=Q_3\,\frac{Q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r_{3,1}}=Q_1\,\frac{Q_3}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r_{1,3}}=Q_1\,V_{1,3}$$

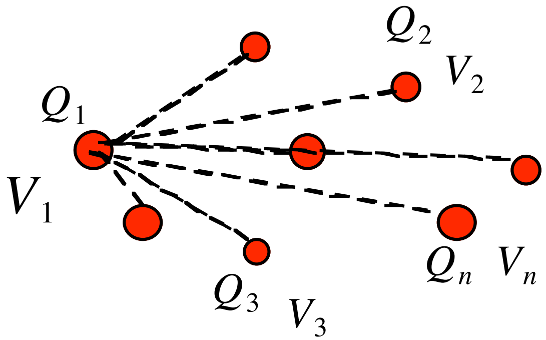
相反性を使う

$$Q_1\,V_{1,2}+Q_1\,V_{1,3}+Q_1\,V_{1,4}+\ldots\ldots+Q_1\,V_{1,n}$$

$$=Q_1\left(V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4}+\ldots\ldots+V_{1,n}\right)=Q_1\,V_1$$ とおく



$$
\begin{aligned}
2W=\;&Q_1\,(\,0+V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4}+\ldots\ldots+V_{1,n}\,)\\
&+Q_2\,(\,V_{2,1}+0+V_{2,3}+V_{2,4}+\ldots\ldots+V_{2,n}\,)\\
&+Q_3\,(\,V_{3,1}+V_{3,2}+0+V_{3,4}+\ldots\ldots+V_{3,n}\,)\\
&\ldots\\
&+Q_n\,(\,V_{n,1}+V_{n,2}+V_{n,3}+\ldots\ldots+V_{n,n-1}+0\,)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
&=Q_1\,V_1\\
&+Q_2\,V_2\\
&+Q_3\,V_3\\
&\ldots\\
&+Q_n\,V_n
\end{aligned}
$$



電位 $V_1 = 0 + V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \ldots\ldots + V_{1,n}$

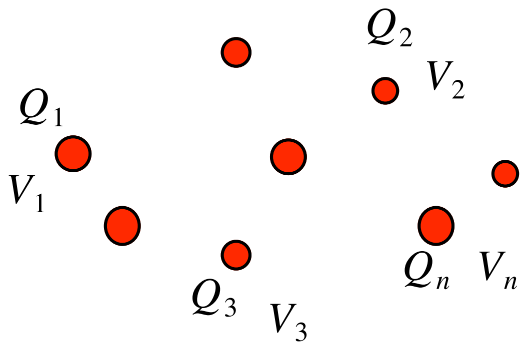
Q_1 自身からは無い。

Q_1 の電位は $Q_2, Q_3,\quad Q_n$ によって決まる

他の電荷によって決まる。

離散電荷による位置エネルギー　W

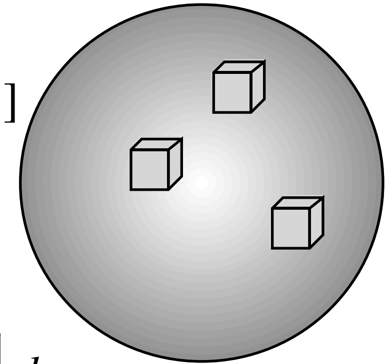
総和は $W = \dfrac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \ldots\ldots + Q_n V_n\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} Q_m V_m$



$$W = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} Q_m V_m$$

$\dfrac{1}{2}\sum$（電荷）×（その点の電位）

連続分布電荷によるエネルギー表現



$$\rho_v = \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad [\,\mathrm{C/m^3}\,]$$

$$dQ = \rho_v \, dv$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} Q_m V_m \Rightarrow \frac{1}{2}\int_v \rho_v V \, dv$$

電界による表現へ

$$\left(\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \rho_v\right)$$

ベクトル公式

$$W_e = \frac{1}{2}\int V \,\nabla\cdot \boldsymbol{D}\, dv = \frac{1}{2}\int \left[\nabla\cdot(V\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D}\cdot\nabla V\right] dv$$

ガウスの発散定理

$$W_e = \frac{1}{2}\oint_S (V\boldsymbol{D})\cdot d\boldsymbol{S} - \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{D}\cdot\nabla V\, dv$$

$$\left(\boldsymbol{E} = -\nabla V\right)$$

$$W_e = \frac{1}{2}\oint_S (V\boldsymbol{D})\cdot d\boldsymbol{S} + \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{D}\cdot \boldsymbol{E}\, dv$$

$v \to \infty \quad S \to \infty \quad r \to \infty$

$V \to \frac{1}{r} \qquad |\boldsymbol{D}| \to \frac{1}{r^2} \qquad d\boldsymbol{S} \to r^2$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{r\, r^2} \Rightarrow 0$$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{D}\cdot \boldsymbol{E}\, dv}$$

単位体積当たり $\dfrac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2} = \dfrac{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}}{2} = \dfrac{\varepsilon_0 |\boldsymbol{E}|^2}{2} = \dfrac{|\boldsymbol{D}|^2}{2\varepsilon_0} \left[\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3}}\right]$ のエネルギーが蓄えられる

静電界のエネルギー密度

(電界による表現)

$$w_e = \frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \left|\boldsymbol{E}\right|^2}{2}$$

単位体積あたり

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dv$$

全空間

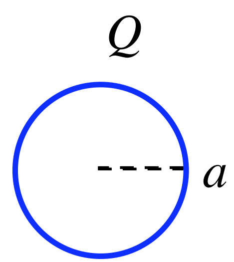
例１　半径aの球殻が電荷Ｑをもっている。その電荷による静電エネルギー

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_r$$

$$w_e = \frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2$$

$$W_e = \int_v w_e\,dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\,dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

$r > a$ の空間に蓄えられる



一方，回路的には

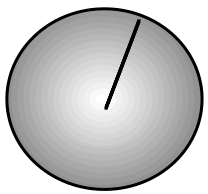
電位　$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

エネルギー

$$\frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

Q に蓄えられる？

例2　一様な体積電荷密度 ρ_v をもつ半径a の球による静電エネルギー



$r < a$　　$\boldsymbol{E} = E_r\,\boldsymbol{a}_r = \dfrac{\rho_v}{3\,\varepsilon_0}\,r\,\boldsymbol{a}_r$

エネルギー密度　$w_{e\,1} = \dfrac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2} = \dfrac{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2}{2} = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\left(\dfrac{\rho_v}{3\,\varepsilon_0}\,r\right)^2$

$a < r$　　$\boldsymbol{E} = E_r\,\boldsymbol{a}_r = \dfrac{\rho_v}{3\,\varepsilon_0}\dfrac{a^3}{r^2}\,\boldsymbol{a}_r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\boldsymbol{a}_r$

エネルギー密度　$w_{e\,2} = \dfrac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2} = \dfrac{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2}{2} = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\left(\dfrac{\rho_v}{3\,\varepsilon_0}\dfrac{a^3}{r^2}\right)^2$

$$W_e = \int_v w_e\,dv = \int_0^a w_{e\,1}\,dv + \int_a^\infty w_{e\,2}\,dv$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a \left(\frac{\rho_v}{3\,\varepsilon_0}\,r\right)^2 4\pi r^2\,dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^\infty \left(\frac{\rho_v}{3\,\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^2}\right)^2 4\pi r^2\,dr$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\rho_v}{3\,\varepsilon_0}\right)^2\frac{4\pi a^5}{5} + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\rho_v\,a^3}{3\,\varepsilon_0}\right)^2\frac{4\pi}{a} = \frac{4\pi\,\rho_v^2\,a^5}{15\,\varepsilon_0}$$