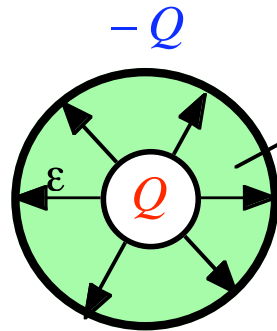
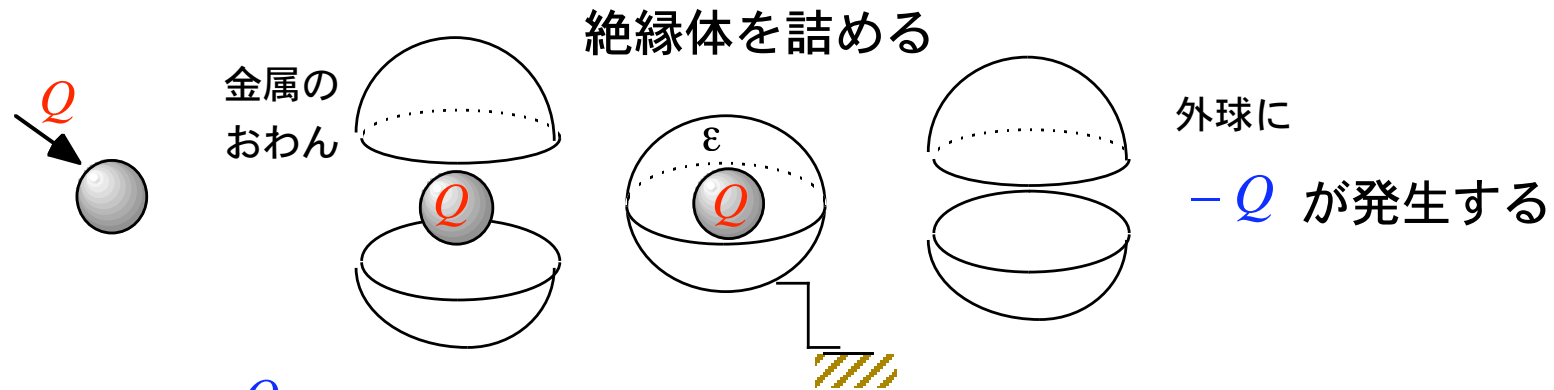


誘電体

Michael Faraday (UK)の実験



誘電体により，自由空間（添字 0）に比べて

誘電体をはさんだときの静電容量 C は k 倍になる

$$k = \frac{C}{C_0} \quad \text{比誘電率} \quad (\text{物質によって決まる})$$

誘電体により，静電容量を大きくできる

$$C = \frac{Q}{V} \quad Q = C V = k Q_0 = k C_0 V_0$$

絶縁体＝誘電体
電流は通さないが
電界を変化させる

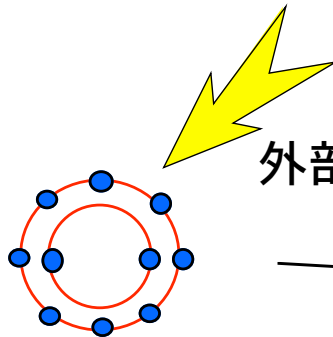
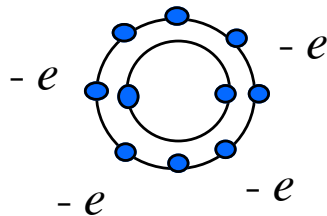
誘電体について（詳細）

全ての物質は陽子，中性子，電子からなる。

プラスとマイナスの電荷は等しく，等量だけ存在

電子定員数は満杯状態

（束縛されている）

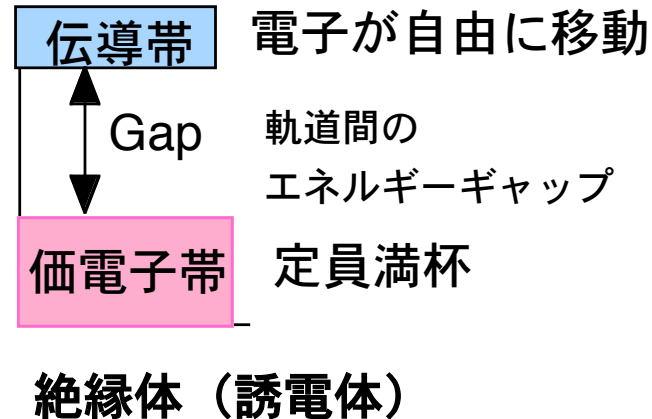


外部エネルギー

エネルギーGapが大きいので電子は
伝導帯のレベルに移れない

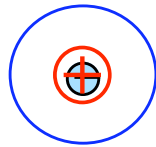
（巨大エネルギーを与えて，移った場合は，絶縁破壊が起きる）

エネルギーレベル

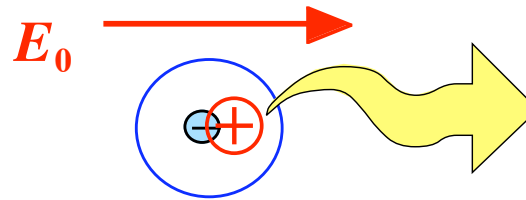


微細構造 プラスとマイナスの電荷は等しく，等量だけ存在

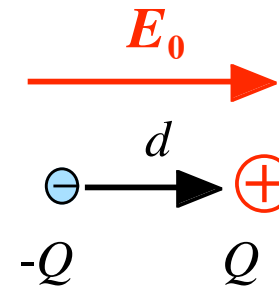
外部から電界をかける



両者の中心は一致
電子の方が軽い

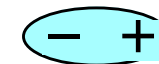


両者の中心は離れる



$$p = Qd$$

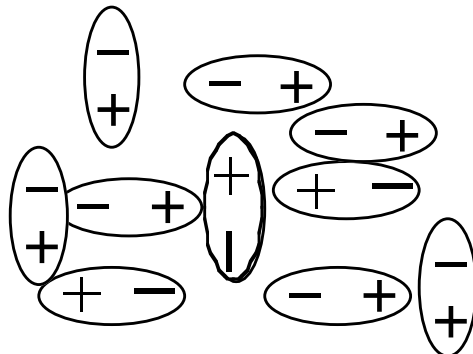
電気双極子を形成



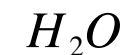
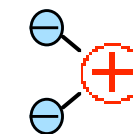
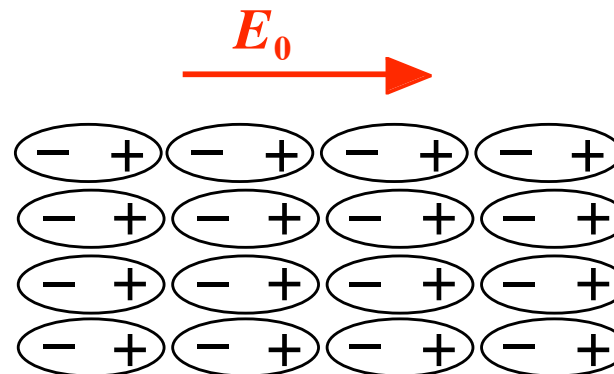
電子分極
原子分極
配向分極

$$E_0 = 0$$

多数の分子が集まっている状態では



ランダム配置

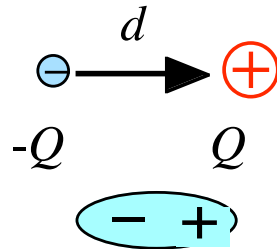


電気双極子の集合

双極子モーメント

単位体積あたりN個

平均双極子モーメント



$$p = Qd$$

電界に比例するので

$$p = \alpha E$$

$$P = \sum_{i=1}^N p_i$$

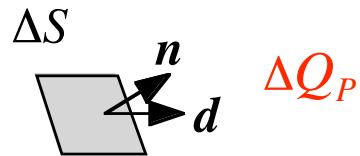
P 分極ベクトルという

$$P = N \alpha E$$

電荷密度 ρ で Δv の体積中の双極子モーメントは

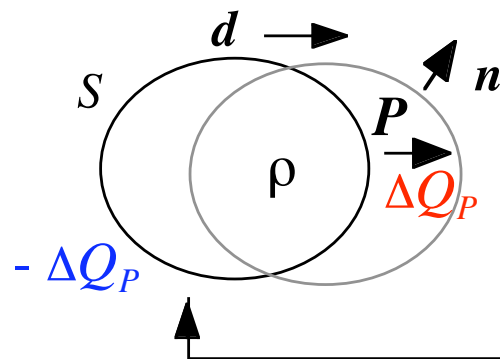
$$\Delta p = \rho \Delta v d$$

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta v} = \rho d$$



d だけ移動したときに ΔS を通過する電荷は

$$\Delta Q_P = \rho \underset{\text{体積}}{d \cdot n \Delta S} = P \cdot n \Delta S = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$



ΔQ_P だけ移動すると

元の体積にとっては

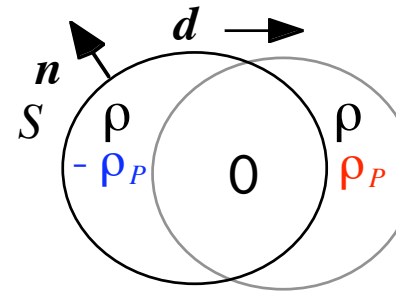
$-\Delta Q_P$ ができたことと等しい

体積 v 内では $-Q_P = \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ が発生し、その結果、分極電荷が発生する

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{P} dv = - \int_v \rho_P dv$$

(ガウスの定理より)

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P$$



電荷から発生する電束について

ϵ_0 は自由空間の誘電率

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_P) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P})$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

真の電荷から発生

$$\mathbf{P} = N \alpha \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

書換

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

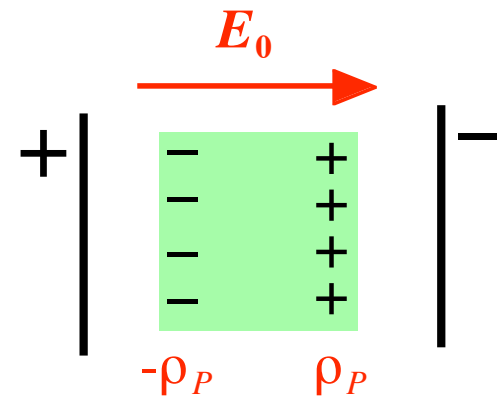
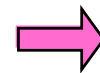
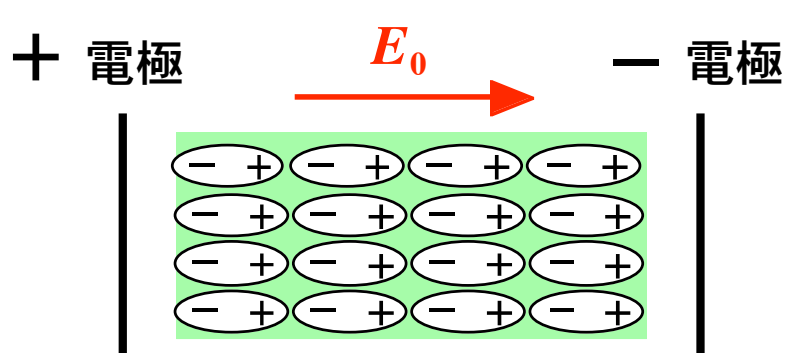
比誘電率 $\epsilon_r = 1 + \chi_e$

電束密度

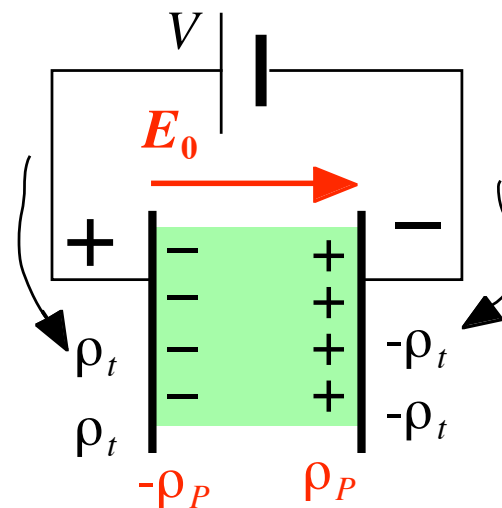
$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

誘電率

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$



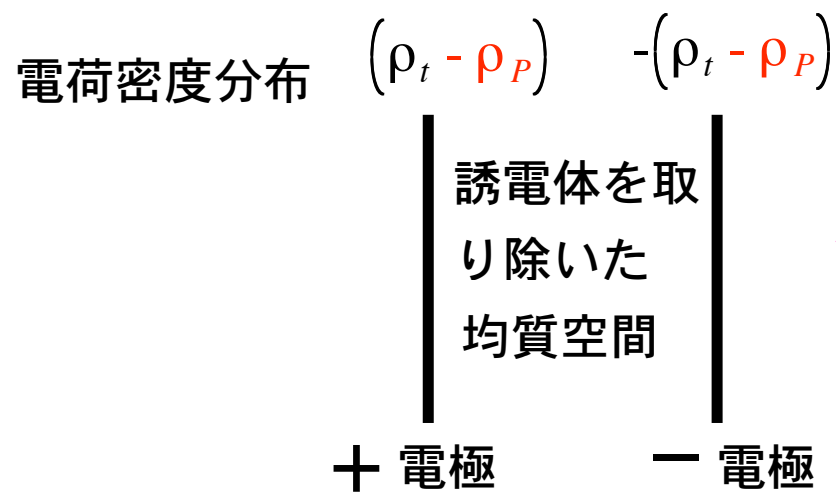
分極による電荷が現れる



ρ_t 真の電荷密度



同じ効果

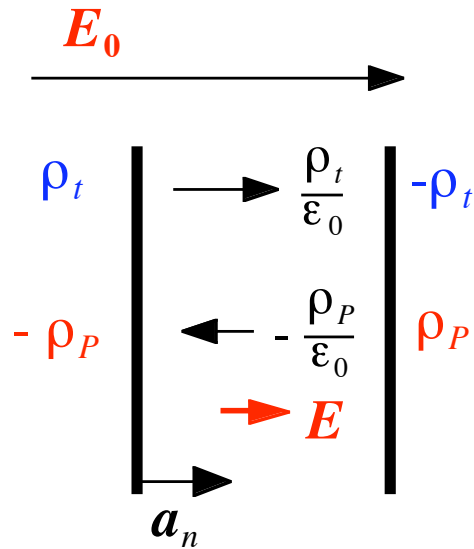


ρ_P 分極による電荷密度

誘電体中の電界 E

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

$$P = \epsilon_0 \epsilon_r E - \epsilon_0 E = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$$

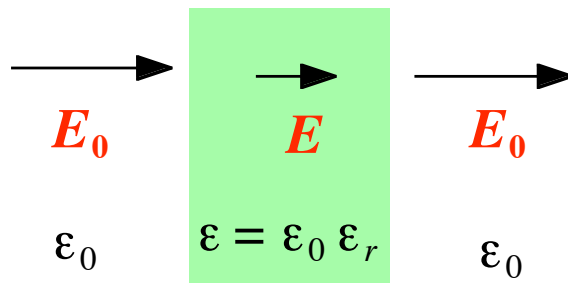


誘電体中の電界 E

自由空間中 $E = \frac{\rho_t}{\epsilon_0} a_n$
 に比べて $\frac{\rho_P}{\epsilon_0} a_n$ だけ少ない

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} (D - P) = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

分極の効果 $\Rightarrow \frac{1}{\epsilon_r}$ による効果と考えると簡単



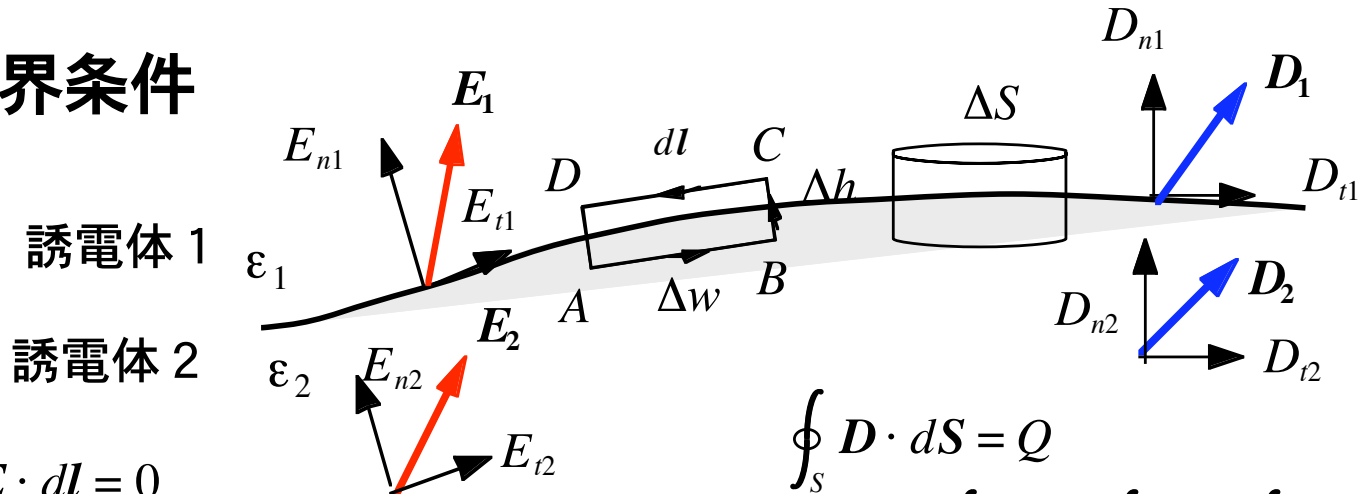
$$D = \epsilon E = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

比誘電率
 $\epsilon_r \geq 1$

$\epsilon_r = 80$ 水
 $\epsilon_r = 3.2$ 氷
 $\epsilon_r = 1$ 空気

電界は
 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍へ

境界条件



$$\oint E \cdot dl = 0$$

$$\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A = 0$$

$$E_{t2} \Delta w + \frac{\Delta h}{2} (E_{n2(B)} + E_{n1(C)})$$

$$- E_{t1} \Delta w - \frac{\Delta h}{2} (E_{n1(D)} + E_{n2(A)}) = 0$$

$\Delta h \Rightarrow 0$ の極限では

$$(E_{t2} - E_{t1}) \Delta w = 0$$

電界の接線成分の連続性

$$\oint_S D \cdot dS = Q$$

$$\int_{upper} + \int_{side} + \int_{lower} = Q$$

$$D_{n1} \Delta S + \frac{\Delta h}{2} L (D_{t1} + D_{t2}) - D_{n2} \Delta S = \rho_s \Delta S$$

$\Delta h \Rightarrow 0$ の極限では

$$D_{n1} - D_{n2} = \begin{cases} \rho_s & \text{表面電荷を置いた場合} \\ 0 & \text{置かない場合} \end{cases}$$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$\frac{D_{t1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_2}$$

$$D_{n1} = D_{n2}$$

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$$

電束密度の
法線成分の
連続性

境界条件から導出される屈折の性質

$$D = \epsilon E$$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

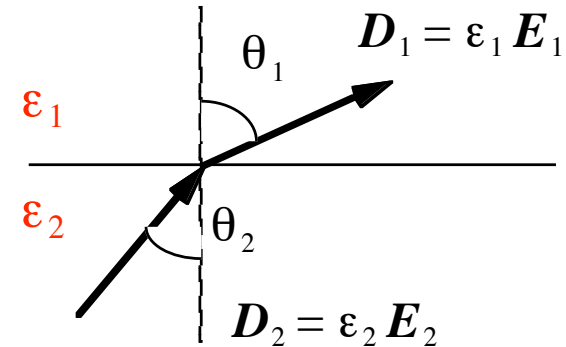
電界の接線成分の連続性

$$\frac{D_1}{\epsilon_1} \sin \theta_1 = \frac{D_2}{\epsilon_2} \sin \theta_2$$

$$D_{n1} = D_{n2}$$

電束密度の法線成分の連続性

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$$



したがって

$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_2}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$\text{if } \epsilon_2 < \epsilon_1 \implies \theta_2 < \theta_1$$

$$\text{if } \epsilon_1 < \epsilon_2 \implies \theta_1 < \theta_2$$

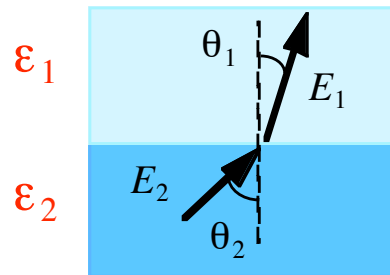
屈折の続き

電界の大きさ $E_2 = \sqrt{E_{t2}^2 + E_{n2}^2} = E_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \cos^2 \theta_1}$

電束密度の大きさ $D_2 = \sqrt{D_{n2}^2 + D_{t2}^2} = D_1 \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2 \theta_1}$

以上をまとめると

if $\epsilon_1 < \epsilon_2$

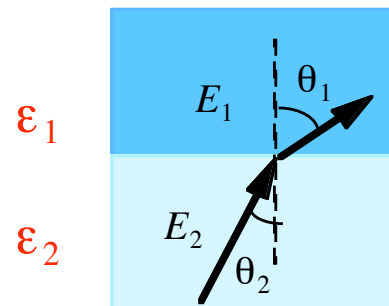


then

$$\theta_1 < \theta_2$$

$$E_2 < E_1$$

if $\epsilon_2 < \epsilon_1$



then

$$\theta_2 < \theta_1$$

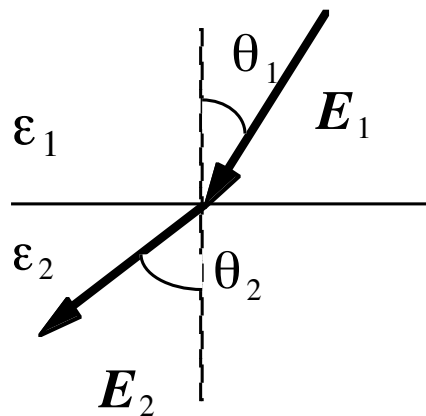
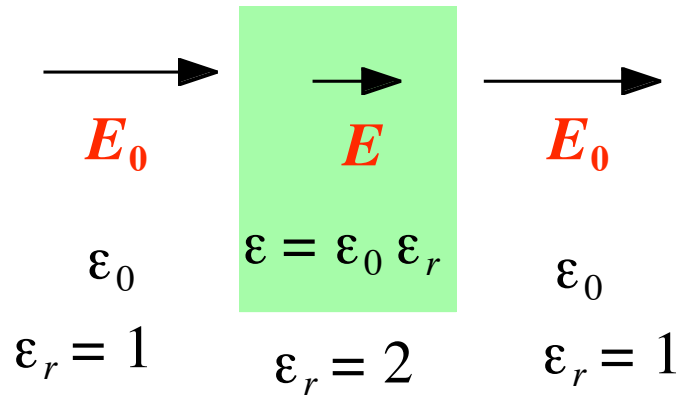
$$E_1 < E_2$$

the same figures

これから一般的な結論は？

Comprehension Check !

図のような誘電体平板の中の電界を求めよ
ただし、外部からの印可電界は
 E_0 とする。



自由空間 $\epsilon_1 = \epsilon_0$ から $\theta_1 = 45^\circ$

の入射角で電界が誘電体平面に入っ
ているとき、誘電体内の屈折角
 θ_2 を求めよ。ただし、

$\epsilon_2 = \sqrt{3} \epsilon_0$ とする。

誘電体中に蓄えられるエネルギー

$D = \epsilon E$ を使って 単位体積当たりの密度は

$$\frac{D \cdot E}{2} = \frac{\epsilon E \cdot E}{2} = \frac{\epsilon |E|^2}{2} = \frac{|D|^2}{2\epsilon}$$

$$\epsilon_0 \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

全空間では体積積分

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v D \cdot E dv$$

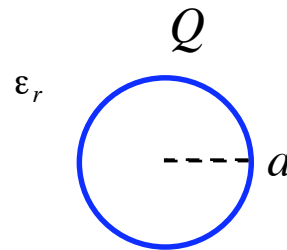
例 1

半径 a の球殻が電荷 Q をもっている。その電荷による静電エネルギーは？

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$

$$w_e = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2$$

$$W_e = \int_v w_e dv = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \int_a^\infty \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r a}$$

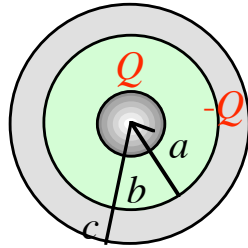


$r > a$ ϵ_r
 の誘電体中に蓄えられる
 エネルギーは
 自由空間に比べて

$$\frac{1}{\epsilon_r} \quad \text{減少}$$

2つの同心球

$a < r < b$ に誘電体を入れたときの静電容量の比較



$\epsilon = \epsilon_0$ (自由空間)

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ (誘電体)

ガウスの法則 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r 4\pi r^2 = Q$

$$D_r = \epsilon_0 E_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$D_r = \epsilon_0 \epsilon_r E_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

電界

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \mathbf{a}_r$$

$$V = - \int_b^a \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{r} \mathbf{a}_r = - \int_b^a \frac{Q dr}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_b^a = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

電位差

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$V_{\epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

静電容量

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi \epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

$$C_{\epsilon_r} = \frac{Q}{V_{\epsilon_r}} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

$$\frac{C_{\epsilon_r}}{C} = \epsilon_r$$

誘電体によって静電容量は ϵ_r 倍増える

誘電体を入れることによって減少した分の電圧を $V_{\epsilon_r} = \frac{V_0}{\epsilon_r} \Rightarrow V_0$

と一定になるように，電荷を供給してやれば， $Q_0 \Rightarrow Q'$

$$Q_0 = C_0 V_0 = C_{\epsilon_r} V_{\epsilon_r} = \epsilon_r C_0 \frac{V_0}{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon_r C_0 V_0 = Q'$$

誘電体に蓄えられるエネルギーは増加する

$$\frac{Q' V_0}{2} = \frac{C_{\epsilon_r} V_0^2}{2} = \epsilon_r \frac{C_0 V_0^2}{2}$$

$$Q' = \epsilon_r C_0 V_0$$

