実験事実

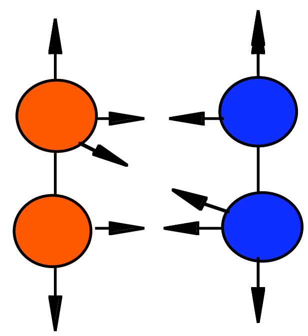
BC600年ころ　コハクが摩擦によって軽い物体（毛，紙など）を引きつけることを発見　（神の力？）

コハク（ギリシャ語で）＝Electricity(電気）

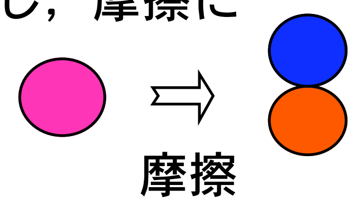
1570年　Gilbert ：摩擦による帯電現象のまとめ

電気には２種類（正，負？）ある。

同種類の電気は反発力が働き，
異種類の電気には吸引力が働く。



帯電していない物体は両種の電気を同じ量だけ含み，外部に対して電気的性質を示さない。しかし，摩擦によって両種の電気が引き離される。



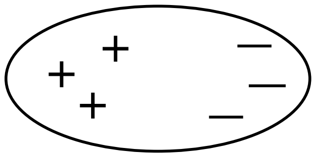
電荷　帯電体のもつ電気　スカラー量

1747年　Flanklin：プラス・マイナスの定義　⊕　⊖

Q　単位：[C]　Coulomb　クーロン

電子の電荷　⊖　$e = -1.602 \times 10^{-19}$ [C]　負電荷の最小単位

＋Q　－Q　**電気素量**　1.602×10^{-19} [C]

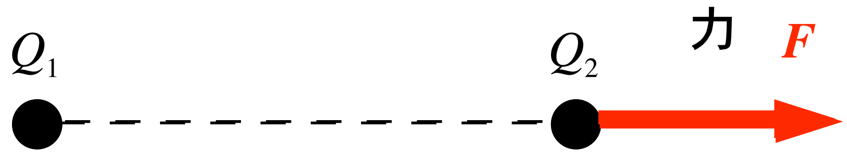


電荷Ｑの大きさは 電気素量の整数倍

1785年　J. A. Coulomb (France)

電荷間に働く力（クーロン力）の定式化

どのように　力が働くか？



２つの考え方

★ 離れた２つの物体に直接，力が働く　　遠隔作用

Action at Distance

★ 空間に伝わって，その空間（場）を通じて力が働く　　近接作用

Action through Medium

⇩

場が物体に作用する。場が主体

例：電磁波

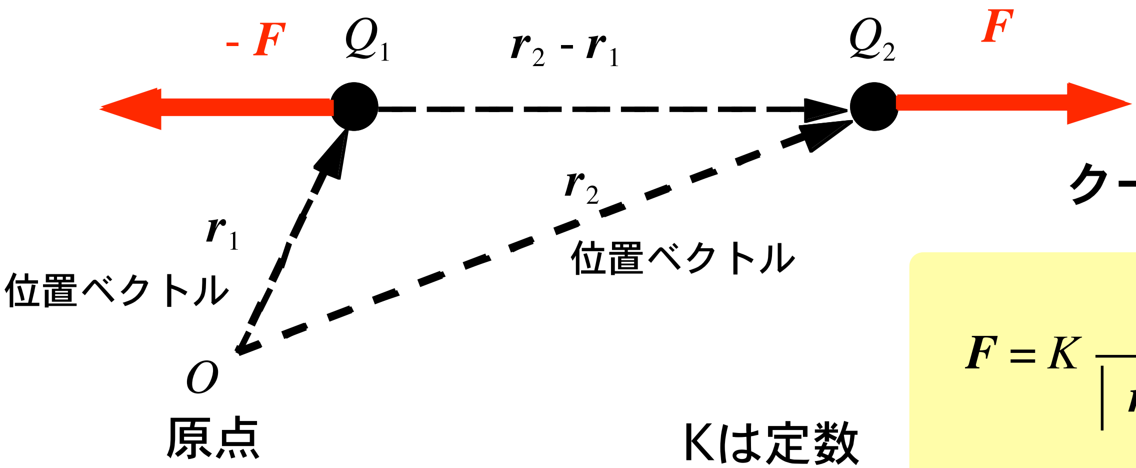
時間遅れ

⟹ **場の理論へ発展**

Field (場，界)　　**Electric field (電界)，Magnetic field (磁界)**

クーロンの実験より以下のことが判明

- ★ 同種の電荷の間に反発力が働き，異種の電荷の間には吸引力が働く
- ★ ２つの帯電体の間に働く力の大きさは，それぞれの帯電体の持つ電荷の積に比例する。
- ★ ２つの帯電体の間に働く力の大きさは，帯電体間の距離の２乗に反比例する。
- ★ 力の方向は，２つの帯電体を結んだ直線に沿う。



クーロン力の定式化

$$\boldsymbol{F} = K \frac{Q_1 Q_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}$$

Kは定数

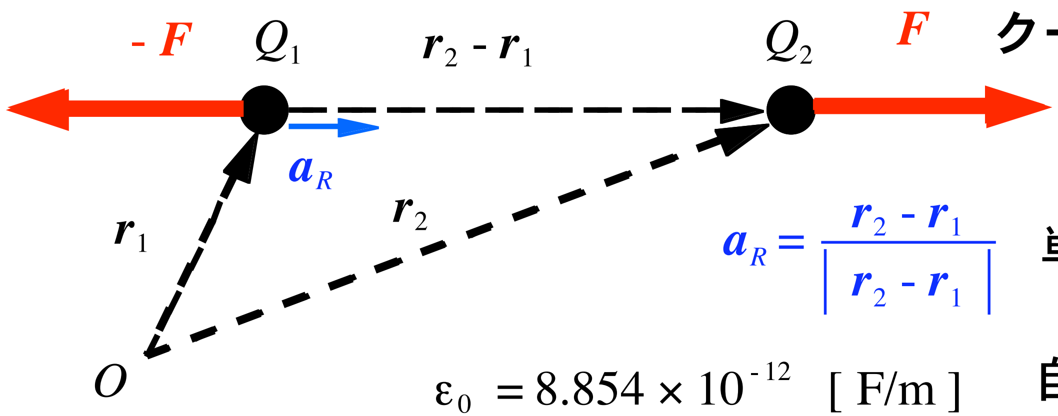
クーロンの法則　　電荷間に働く力 = クーロン力

定数　$K \Rightarrow \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$

SI 単位系

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2}\frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2}\boldsymbol{a}_R$$

[N]



クーロン力

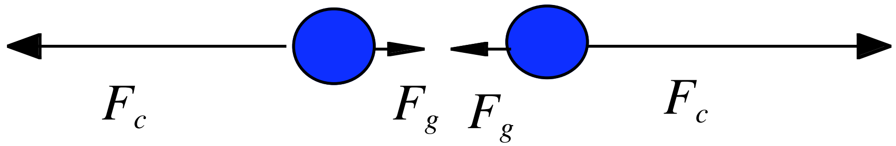
$$\boldsymbol{a}_R = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}$$　単位ベクトル

$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$　[F/m]　自由空間の誘電率

（ $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ の方が覚えやすい ）

なぜクーロン力が重要か？　万有引力との比較

電子２個が１m離れている場合に働く力



$m = 9.11\times10^{-31}$ kg　　　$e = -1.602\times10^{-19}\ C$

万有引力　$F_g = G\dfrac{m^2}{1^2} = 6.67\times10^{-11}\left(9.11\times10^{-31}\right)^2 = 5.54\times10^{-71}$ [N]

クーロン力　$F_c = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{1^2} = 9\times10^{9}\left(1.602\times10^{-19}\right)^2 = 2.31\times10^{-28}$ [N]

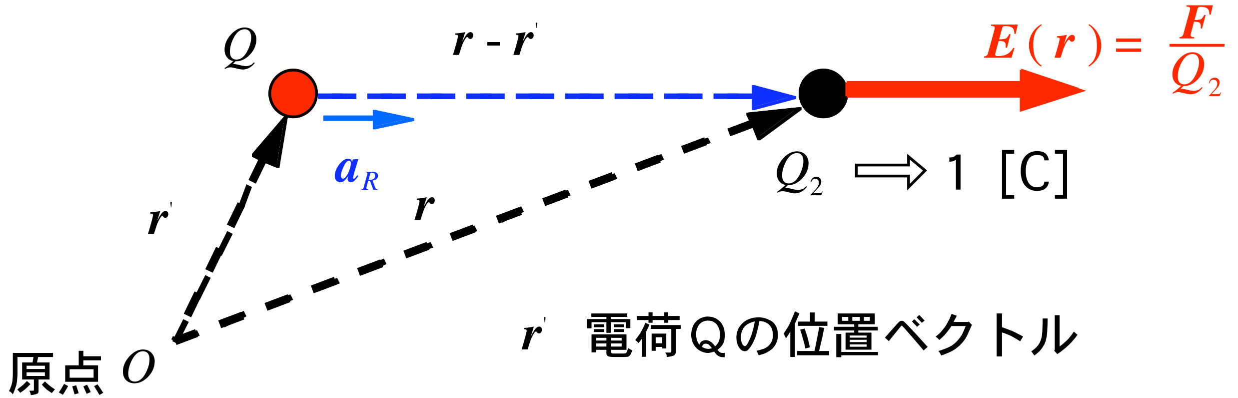
$$\frac{\text{クーロン力}}{\text{万有引力}} = \frac{F_c}{F_g} = \frac{2.31\times10^{-28}}{5.54\times10^{-71}} = 4.17\times10^{42}$$ 倍

非常に大きい

電界とは：　帯電体に電気力が作用している空間（場）

電荷Qによる電界の定義式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{a}_R \quad [\mathrm{N/C}]\ \ or\ [\mathrm{V/m}]$$



$\boldsymbol{F} = Q_2\,\boldsymbol{E}$

クーロン力で

$Q_1 \Rightarrow Q$

$\boldsymbol{r}_1 \Rightarrow \boldsymbol{r}'$

$\boldsymbol{r}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}$

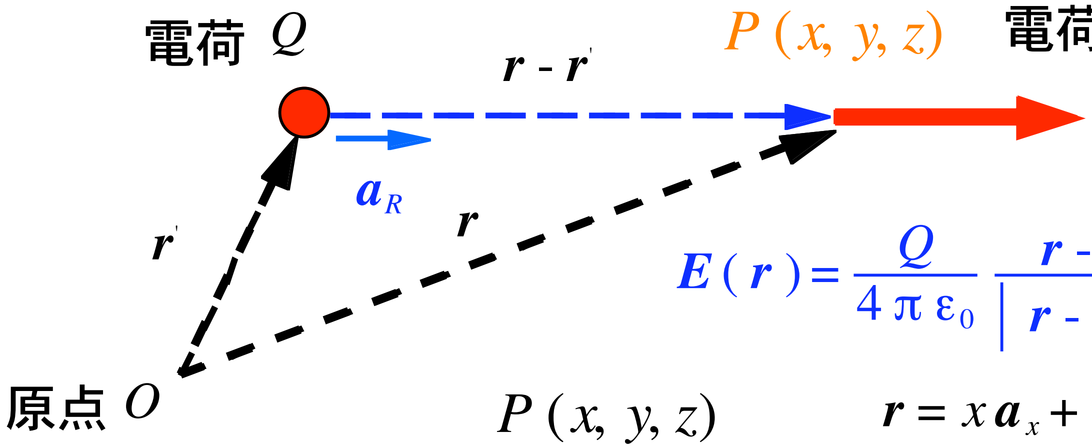
$\boldsymbol{r}'$　電荷Qの位置ベクトル

$\boldsymbol{r}$　観測点の位置ベクトル

$$\boldsymbol{a}_R = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}$$

源（電荷Q）から観測点に向かう単位ベクトル

静電界：電荷が静止している場合の電界



電荷Q により点Pに $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が発生していると考える

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{a}_R$$

$P(x, y, z)$ $\quad \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_x + y\boldsymbol{a}_y + z\boldsymbol{a}_z$

電荷Qの位置ベクトル $\quad \boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{a}_x + y'\boldsymbol{a}_y + z'\boldsymbol{a}_z$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left[(x-x')\boldsymbol{a}_x + (y-y')\boldsymbol{a}_y + (z-z')\boldsymbol{a}_z\right]}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}$$

例題

$P(2,2,2)$ における電界を求めよ。

$Q = 4\pi\varepsilon_0$ [C] が原点にある場合,

$$\boldsymbol{E}(2,2,2) = \frac{4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left[(2-0)\boldsymbol{a}_x + (2-0)\boldsymbol{a}_y + (2-0)\boldsymbol{a}_z\right]}{\left[(2-0)^2 + (2-0)^2 + (2-0)^2\right]^{3/2}} = \frac{\left[\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z\right]}{12\sqrt{3}}$$

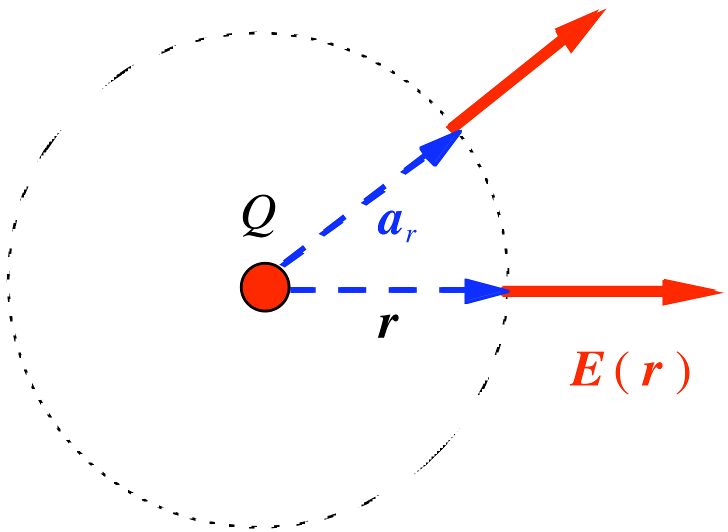
$Q = 4\pi\varepsilon_0$ [C] が $(1,1,1)$ にある場合,

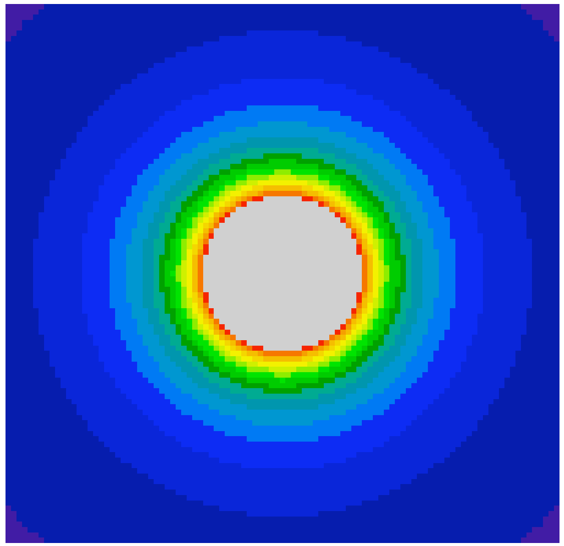
$$\boldsymbol{E}(1,1,1) = \frac{\left[\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z\right]}{3\sqrt{3}}$$

空間分布を想像　　　　仮に　$\boldsymbol{r}' \Rightarrow 0$　電荷を原点に置く

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_r$$

$\boldsymbol{r}$ の大きさが等しいところを考えてみる

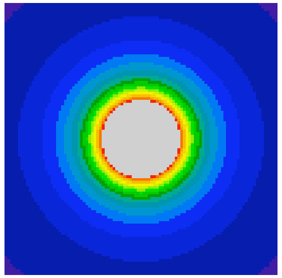




大きさの分布

方向：放射状　　　　同じ半径 r のところで，電界は同じ大きさ

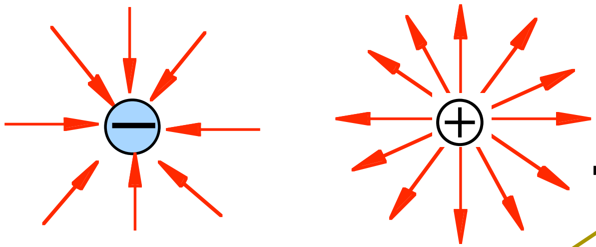
電荷Qを中心とした放射方向を向くベクトルの空間分布となる



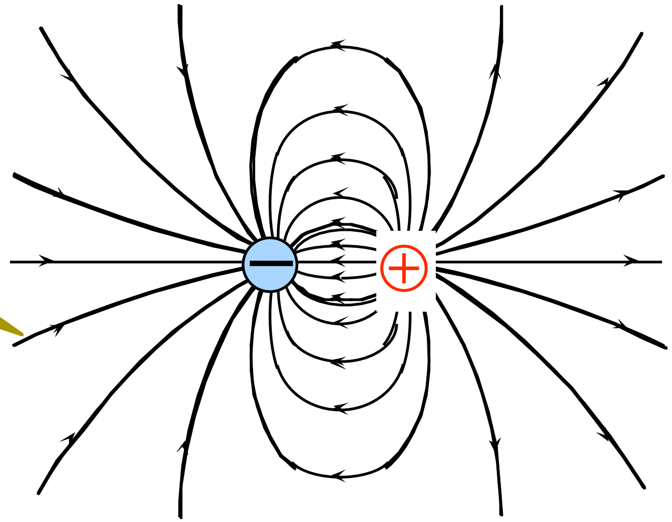
大きさのみ

左の図のような電界（ベクトル量）の空間分布を方向も含めて図に書くことはできないか？

電気力線の導入（想像上）



電気力線

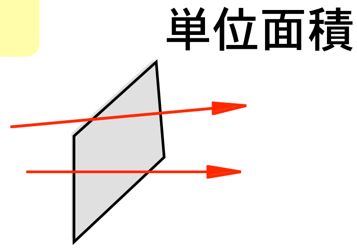


★電気力線上の任意の点で，**接線**はその点における**電界の方向**を表す。

★電気力線は正電荷から出発して負電荷に終わる連続曲線

★ **電気力線が密なところは電界が強く，疎なところは弱い。**

電気力線の密度と電界の大きさの関係

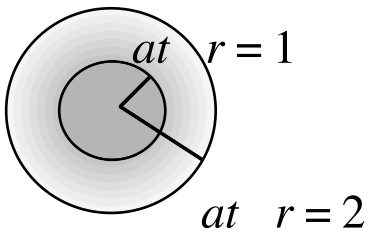


電気力線の密度：

電界中における任意の点において，その点をとおる電気力線に垂直な単位面積の平面を通り抜ける電気力線の数　[本/ m^2]

電界の強さと電気力線の密度

電界の強さ 1 [N/C]の点における電気力線の密度を 1 [本/m^2]とする。



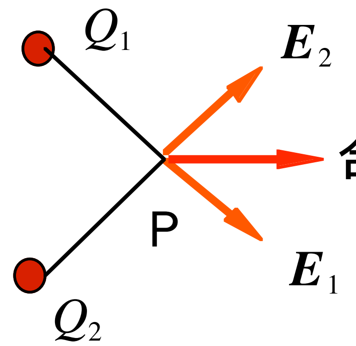
		密度	電界強度
$at\ r = 1$	$E(1) = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 1^2} = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}$	大	大
$at\ r = 2$	$E(2) = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 2^2} = \dfrac{Q_0}{16\pi\varepsilon_0}$	小	小

半径 r の球面を

貫いて外部にでる電気力線の総数 $\Longrightarrow N = E(r) \times S = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \dfrac{Q_0}{\varepsilon_0}$

複数個の電荷による電界はどうなるか？

2 個

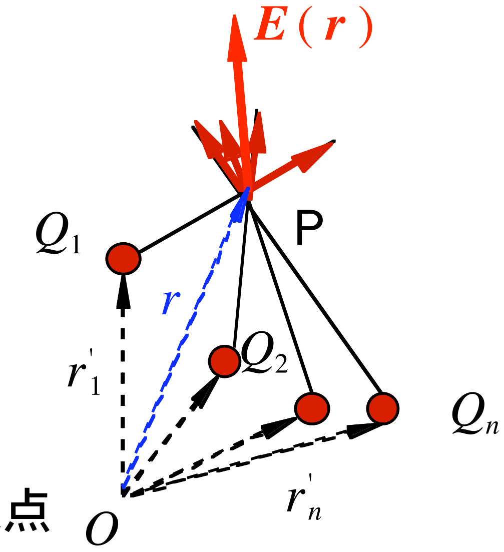


点 P で　$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$

ベクトルの合成

重ね合わせの理
Superposition

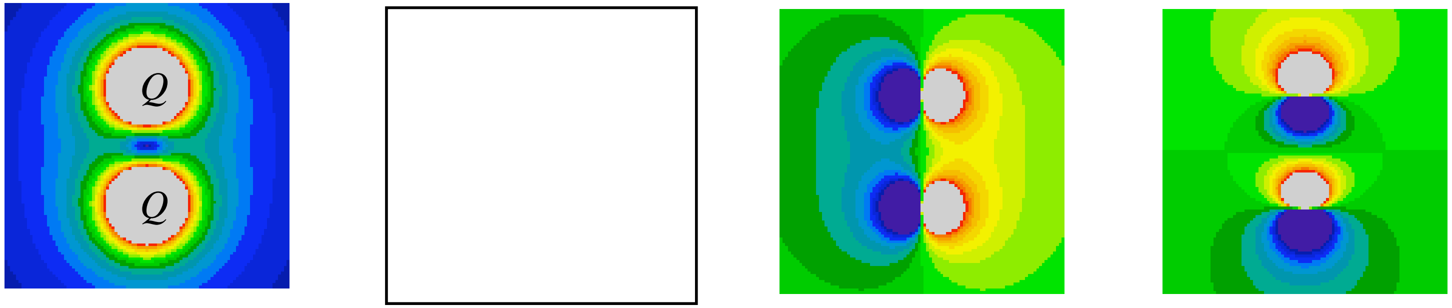
各点電荷から受ける電気力のベクトル和



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_i^n \boldsymbol{E}_i = \sum_i^n \frac{Q_i(\boldsymbol{r}'_i)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_i)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_i|^3}$$

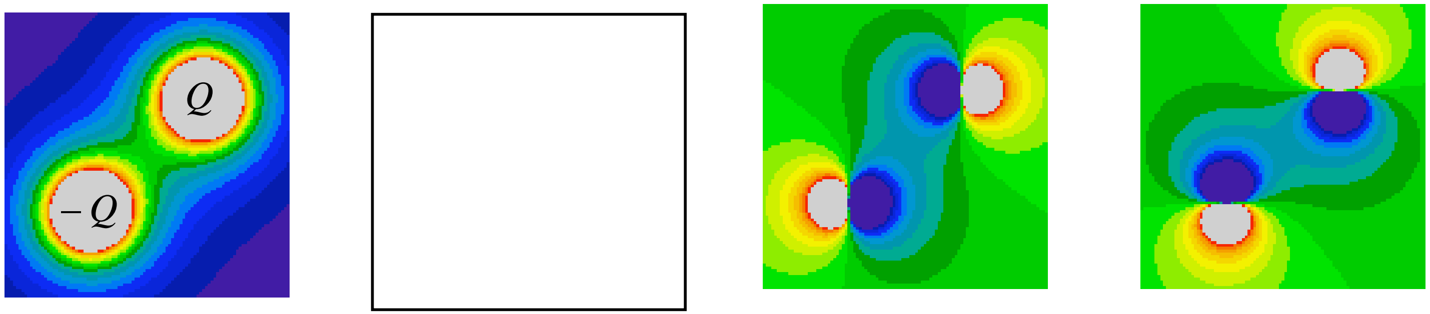
$\boldsymbol{r}$ ：観測点 P の位置ベクトル

For example, Electric Field Distributions with two charges are shown below



$|\boldsymbol{E}|$ E_x E_y

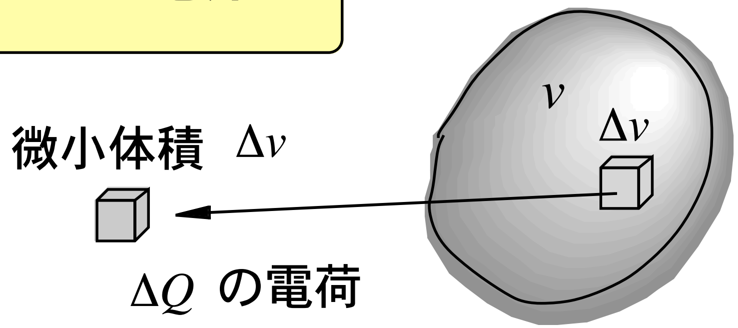
電気力線では？



$|\boldsymbol{E}|$ E_x E_y

連続分布した電荷による電界

ある体積領域 v



全電荷

Q

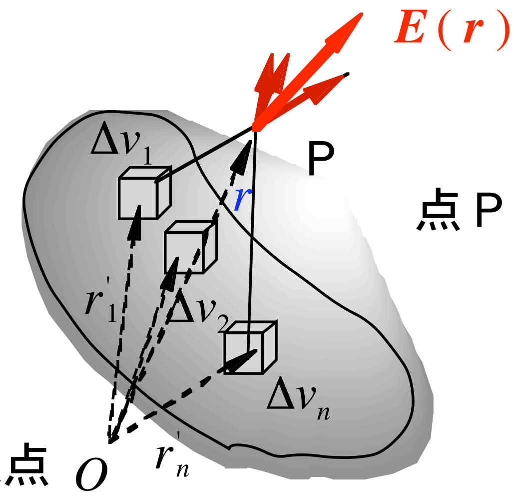
電荷密度について

体積電荷密度

$$\rho_v = \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad [\ \mathrm{C/m^3}\ ]$$

v 内の全電荷は

$$Q = \lim_{n\to\infty}\sum_n \Delta Q = \iiint_v dQ = \iiint_v \rho_v\, dv \;\Rightarrow\; \int_v \rho_v\, dv$$



点 P で

$$\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\Delta Q\ \ (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \left|\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\ \right|^3} = \frac{\rho_v(\boldsymbol{r}')\,\Delta v\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\ \right|^3}$$

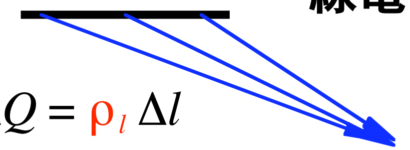
$\boldsymbol{r}'$　微小体積の位置ベクトル

体積分布による電界

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \lim_{n\to\infty}\sum_i^n \Delta\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) = \int_V \frac{\rho_v(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dv'}{4\pi\varepsilon_0\left|\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\ \right|^3}$$

各種連続電荷による電界 $\Delta Q = \rho_l \Delta l = \rho_s \Delta s = \rho_v \Delta v$ からの寄せ集め（積分）

Line

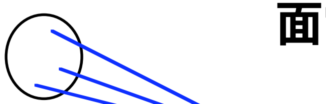


線電荷密度 $\rho_l = \dfrac{\Delta Q}{\Delta l}$ [C/m]

$\Delta Q = \rho_l \Delta l$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \lim_{n\to\infty}\sum_n \Delta \boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{r}) = \int_L \frac{\rho_l(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dl'}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

Surface

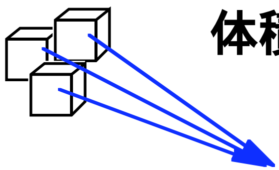


面電荷密度 $\rho_s = \dfrac{\Delta Q}{\Delta s}$ [C/m^2]

$\Delta Q = \rho_s \Delta S$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \lim_{n\to\infty}\sum_n \Delta \boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{r}) = \int_S \frac{\rho_s(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dS'}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

Volume



体積電荷密度 $\rho_v = \dfrac{\Delta Q}{\Delta v}$ [C/m^3]

$\Delta Q = \rho_v \Delta v$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \lim_{n\to\infty}\sum_n \Delta \boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{r}) = \int_V \frac{\rho_v(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dv'}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

電荷密度 $\rho = \rho(\boldsymbol{r}')$

位置の関数としておけば，
電荷の無いところも $\rho(\boldsymbol{r}') = 0$
を使い，万事対応可能

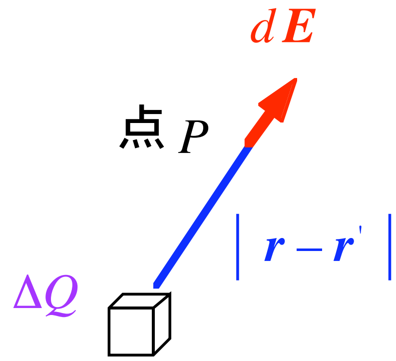
注意！　　教科書と記号の違い！

電荷密度の記号

	（多くの日本の）教科書		このノート（USA版）
線電荷密度	λ	$\Longrightarrow$	$\rho_l = \dfrac{\Delta Q}{\Delta l}$　[C/m]
	後に出てくる波長と間違いやすい		
面電荷密度	σ	$\Longrightarrow$	$\rho_s = \dfrac{\Delta Q}{\Delta s}$　[C/m^2]
	後に出てくる導電率と間違いやすい		
体積電荷密度	ρ	$\Longrightarrow$	$\rho_v = \dfrac{\Delta Q}{\Delta v}$　[C/m^3]

内容は同じものを表している

電荷分布が与えられているときに，電界を求める方法
（クーロン力による方法）



基本式 $$d\boldsymbol{E}=\frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

ΔQ 電荷分布（線，面，体積）の決定
座標系の決定（直角，円筒，球） その人のセンス

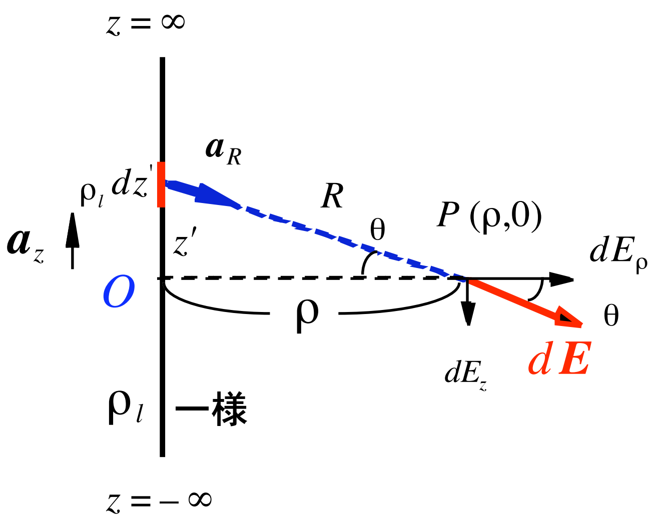
$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2$ 電荷 ΔQ からの距離の取り方
座標系の変数を使う ピタゴラスの定理

$\dfrac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ 単位ベクトルがどちらを向くか？

$$\boldsymbol{E}=\int d\boldsymbol{E}=\int\frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

各成分の導出
積分実行
（変数変換も含む）

無限長の線電荷による電界について



$$d\boldsymbol{E}=\frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0\left|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\,\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}$$

電荷分布：線電荷　$\Delta Q=\rho_l\, dz'$

座標系の決定：円筒　$\left(\rho,\varphi,z\right)$

距離　$\left|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2=R^2=\rho^2+z'^2$

r'は電荷の位置ベクトル　　ピタゴラスの定理

$$\boldsymbol{a}_R=\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}$$

単位ベクトル：どちらを向くか？

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{a}_\rho$　$\boldsymbol{a}_z$　方向に分解

$$d\boldsymbol{E}=\frac{\rho_l\, dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\boldsymbol{a}_R\Rightarrow dE_\rho\,\boldsymbol{a}_\rho+dE_z\,\boldsymbol{a}_z$$

（単位ベクトルとの内積は
成分を引き出す）

$$dE_\rho=d\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_\rho \qquad dE_z=d\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_z$$

単位ベクトル間の内積　$\boldsymbol{a}_R\cdot\boldsymbol{a}_\rho=\cos\theta$　　$\boldsymbol{a}_R\cdot\boldsymbol{a}_z=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

各成分は　$dE_\rho=\dfrac{\rho_l\, dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$　　$dE_z=-\dfrac{\rho_l\, dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta$

つづく

全体は積分で

$$\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} = \int dE_\rho \boldsymbol{a}_\rho + \int dE_z \boldsymbol{a}_z = E_\rho \boldsymbol{a}_\rho + E_z \boldsymbol{a}_z = \int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l \, dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \left(\boldsymbol{a}_\rho \cos\theta - \boldsymbol{a}_z \sin\theta \right)$$

変数変換 $z' = \rho \tan\theta$ $\qquad R^2 = \rho^2 + z'^2 = \rho^2 (1 + \tan^2\theta) = \dfrac{\rho^2}{\cos^2\theta}$

$$dz' = \frac{\rho \, d\theta}{\cos^2\theta} \qquad z' = -\infty \sim \infty \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$$

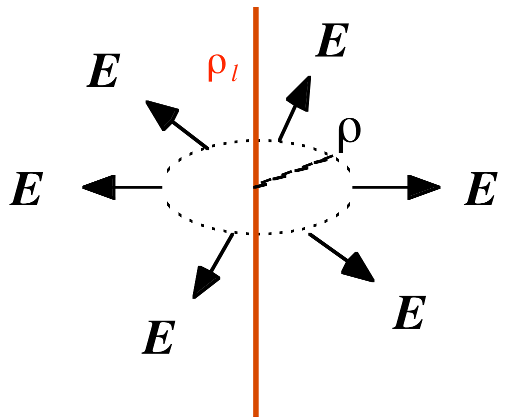
$$E_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l \, dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_l \dfrac{\rho \, d\theta}{\cos^2\theta}}{4\pi\varepsilon_0 \dfrac{\rho^2}{\cos^2\theta}} \cos\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \rho} \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 \rho}$$

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\rho_l \, dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \sin\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin\theta \, d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \rho} \left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 0$$

したがって

$$\boldsymbol{E} = \int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l \, dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \boldsymbol{a}_R = E_\rho \boldsymbol{a}_\rho + 0 \, \boldsymbol{a}_z = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \boldsymbol{a}_\rho$$

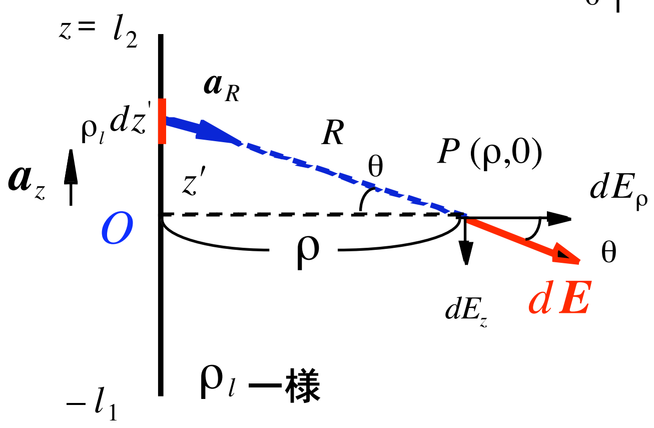
$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \boldsymbol{a}_\rho$$ 半径方向成分のみ



有限長の線電荷による電界の例

線電荷密度 ρ_l

$$dE = \frac{\rho_l(\boldsymbol{r}')\,dr'}{4\pi\varepsilon_0\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} = \frac{\rho_l\,dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R = dE_\rho\,\boldsymbol{a}_\rho + dE_z\,\boldsymbol{a}_z$$



原点を線の中に

r' は電荷の位置ベクトル

$dr' \Rightarrow dz'$

$\boldsymbol{r}$ は観測点の位置ベクトル

$\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|$ は微小電荷から観測点までの距離

$\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right| \Rightarrow R$

$\dfrac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} = \boldsymbol{a}_R$ 単位ベクトル

（単位ベクトルとの内積は成分を引き出す）

$$dE_\rho = d\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_\rho$$

$$= \frac{\rho_l\,dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R\cdot\boldsymbol{a}_\rho = \frac{\rho_l\,dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

$$dE_z = d\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_z$$

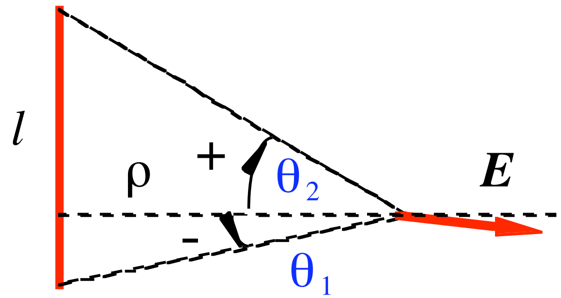
$$= \frac{\rho_l\,dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R\cdot\boldsymbol{a}_z = -\frac{\rho_l\,dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta$$

変数変換 $\quad z' = \rho\tan\theta \qquad dz' = \dfrac{\rho\,d\theta}{\cos^2\theta} \qquad R^2 = \rho^2 + z'^2 = \rho^2(1+\tan^2\theta) = \dfrac{\rho^2}{\cos^2\theta}$

$$E_\rho = \int_{-l_1}^{l_2} dE_\rho = \int_{-l_1}^{l_2}\frac{\rho_l\,dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0\rho}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\,d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left[\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right]$$

$$E_z = \int_{-l_1}^{l_2} dE_z = \int_{-l_1}^{l_2}\frac{-\rho_l\,dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0\rho}\int_{\theta_1}^{\theta_2} -\sin\theta\,d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right]$$

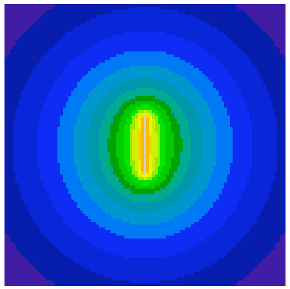
有限長線状電荷（続き）



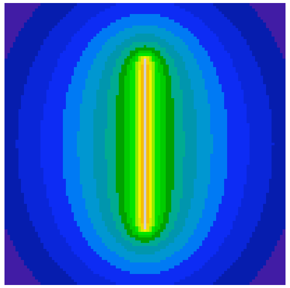
$$E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right]$$

$$E_\rho = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left[\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right]$$

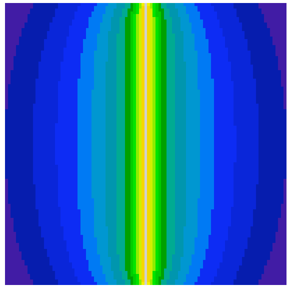
$\left|\boldsymbol{E}\right| = \sqrt{E_\rho^2 + E_z^2}$ の分布



l=2　一辺10の領域



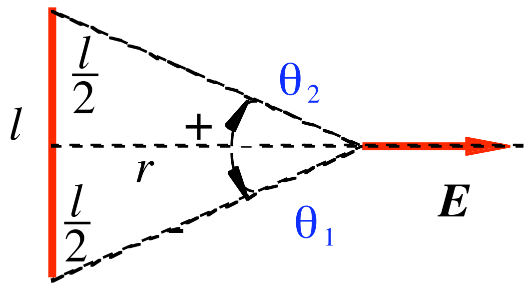
l=6　一辺10の領域



l=10

無限長では　$\theta_2 \to \dfrac{\pi}{2}$　　$\theta_1 \to -\dfrac{\pi}{2}$

$$E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right] \to 0 \qquad E_\rho \to \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{E} = E_\rho\,\boldsymbol{a}_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,\boldsymbol{a}_\rho$$

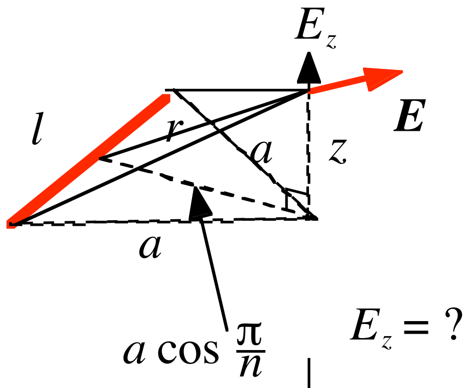


線電荷の中心から距離 r の位置では

$$E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right] \Rightarrow 0$$

$$E_r = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right] \Rightarrow \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\theta_2$$

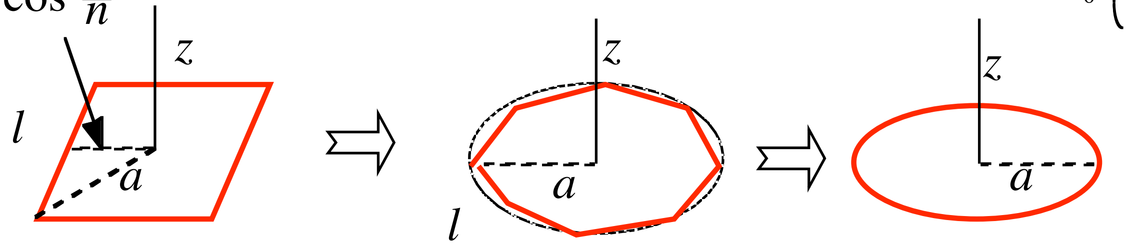
$$E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$



$$E_z = E_r \frac{z}{r}$$

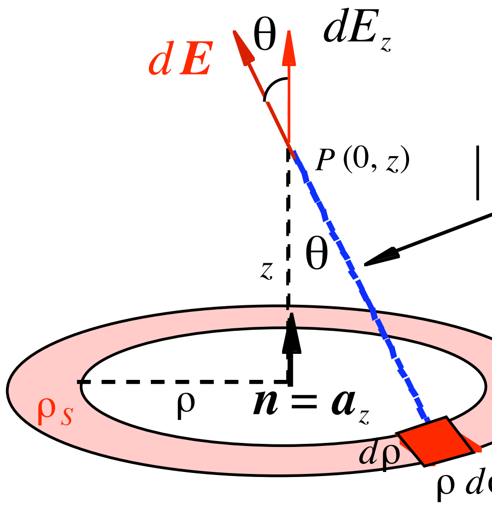
様々な電荷分布による電界（演習問題）

$E_z = ?$ $E_z = ?$ $E_z = \frac{\rho_l a}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$



正方形　　正ｎ角形　　円形

無限平面電荷　一様な面電荷密度で分布している場合　面電荷密度 ρ_s



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_S \frac{\rho_s(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{a}_R\, ds}{4\pi\varepsilon_0 \left| \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \right|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\rho_s(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{a}_R\, ds}{\left| \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \right|^2}$$

$\left| \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \right|$

$$\left| \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \right|^2 = \rho^2 + z^2$$

円筒座標を使用

$$dE_z = d\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{a}_z = \frac{\rho_S\, d\rho\, \rho\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0\left(\rho^2 + z^2\right)}\cos\theta$$

微小電荷 $\rho_S\, d\rho\, \rho\, d\varphi$

$$z\tan\theta = \rho \qquad d\rho = \frac{z\, d\theta}{\cos^2\theta} \qquad \rho^2 + z^2 = \frac{z^2}{\cos^2\theta}$$

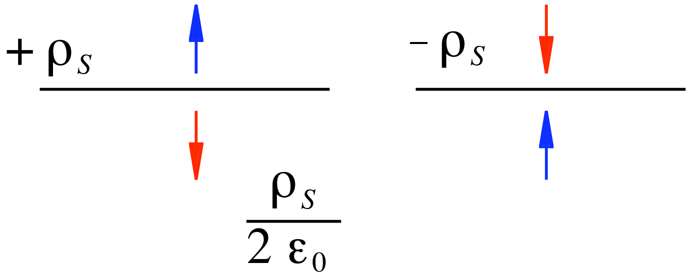
$$E_z = \int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\rho_S\, d\rho\, \rho\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0\left(\rho^2 + z^2\right)}\cos\theta = 2\pi\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_S\left(\frac{z\, d\theta}{\cos^2\theta}\right) z\tan\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{z^2}{\cos^2\theta}\right)}\cos\theta = \frac{\rho_S}{2\,\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = \frac{\rho_S}{2\,\varepsilon_0}$$

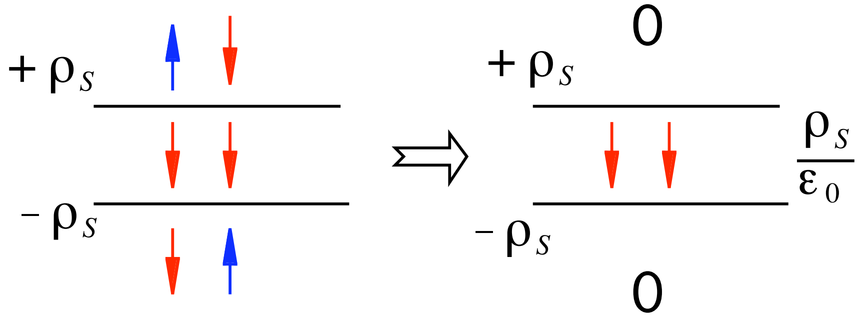
電荷から観測点までの距離に関わらず一定

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\,\varepsilon_0}\,\boldsymbol{n}$$

normal direction : 法線方向　$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_z$　z 方向の単位ベクトル

面電荷（続き）





コンデンサーの原理

クーロン力による
電界分布のまとめ

電荷からの距離 R に関して

点電荷	$\boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_r$	$\dfrac{1}{R^2}$	で減少
無限長線電荷	$\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\boldsymbol{a}_\rho$	$\dfrac{1}{R}$	で減少
無限の平面電荷	$\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$	R	に無関係