

はじめに

担当 山口芳雄

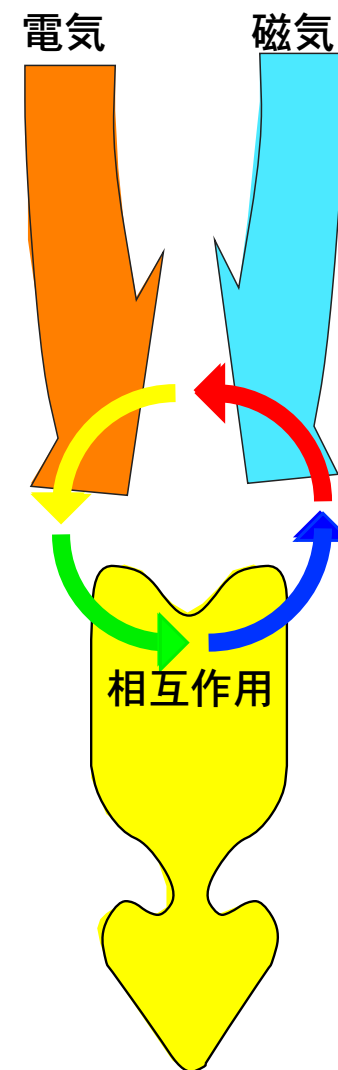
石井 望

なぜ電磁気学を学ぶのか？

- 科学・技術の基礎：科学技術の発展のため
- 自然現象の理解：電気・磁気・光現象の学問
- 自然科学では最も整った体系の学問（物理）
- 電気・電子・情報通信の基礎科目
- 140年以上の歴史：人類の英知

電磁気学関係年表

1600	磁石の諸性質	ギルバート（イギリス）
1666	（万有引力の法則）	ニュートン（イギリス）
1765	（蒸気機関，産業革命）	ワット（イギリス）
1785	電気・クーロンの法則	クーロン（フランス）
1800	ボルタの電池	ボルタ（イタリア）
1820	電流の磁気作用	エルステッド（デンマーク）
	ビオ・サバールの法則	ビオ・サバール（フランス）
	アンペアの法則	アンペール（フランス）
1826	オームの法則	オーム（ドイツ）
1831	電磁誘導の法則	ファラデー（イギリス）
1834	レンツの法則	レンツ（ロシア）
1840	ガウスの法則	ガウス（ドイツ）
1859	（生物の進化論）	ダーウィン（イギリス）
1861	電磁界の方程式	マックスウエル（イギリス）
1864	光の電磁波説	マックスウエル（イギリス）
1888	電磁波の実証	ヘルツ（ドイツ）
1895	運動流体の電磁気学	ローレンツ（オランダ）
1897	電子の存在確認	トムソン（イギリス）



● 目標：場（スカラー場，ベクトル場）という 考え方を学ぶ。

電磁気 1 では空間にできる（分布する）静電界を求める問題を扱う

静電界：時間的に変化しない電界

ベクトル場の例：？

スカラー場の例：？

数学（ベクトル解析，微分，積分）を多用する

[http://www.wave.ie.niigata-u.ac.jp/
~yamaguch/ex/index.html](http://www.wave.ie.niigata-u.ac.jp/~yamaguch/ex/index.html) 参照

ベクトル解析，電磁気学に関する資料が載っている。

電磁気学の体系

クーロンの法則

電荷に働く力 $\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r$

電界 $\mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r$

ポテンシャル $\phi(r) = -\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 = \int_s \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

静電界の特徴 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \implies \mathbf{E} = -\nabla\phi$

ラプラスの方程式 $\nabla^2\phi = 0$

ポアソンの方程式 $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

空間に蓄えられる単位体積当たりのエネルギー

$$W_e = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}$$

ガウスの法則

電束密度 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

$$\Phi = \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv = Q = \int_v \rho dv$$

境界条件

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

電荷保存則

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

電流 $I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$

電流密度 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

抵抗

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}{\int_s \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

アンペアの周回積分の法則

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$= \int_s \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\implies \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

磁荷が無い

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

境界条件

電流に働く力

$$\mathbf{F} = I \times \mathbf{B} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

磁束密度 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

ビオサバールの法則

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_r}{4\pi r^2}$$

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\mathbf{J}(r')}{r} dv'$$

磁気エネルギー $W_m = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}$

インダクタンス

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad \Psi \text{ 鎖交磁束}$$

ローレンツ力 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

ファラデーの電磁誘導法則
(レンツの法則)

$$emf = -\frac{d\Phi}{dt} \implies \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \implies \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

変位電流 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

境界条件

波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (\mathbf{J} = \rho = 0)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

境界条件

Poynting Vector $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

$$\mathbf{E}(r,t) = \mathbf{E}_0 \exp[j(\omega t \pm kr)] \quad \text{平面波}$$



教科書

ISBN978-4-339-00806-7

要点がわかる 電磁気学

2800円+税

博士(工学) 石井 望 著



コロナ社

成績評価方法

$$\frac{\text{中間試験} + \text{期末試験}}{2} + \text{レポート合計} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 60\text{点}$$

(80点)

(20点)

講義資料

<http://www.wave.ie.niigata-u.ac.jp/~yamaguch/>

山口研究室ページの左欄へ

教育関連ページへ

電磁気学 EM(pdf) 12 MB

① 学習時間について

JABEE

CAP制

GPA

累積GPA

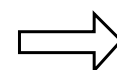
国際認定へ（文部科学省基準）

1 単位 45 時間

2 単位 90 時間

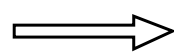
の学習をもって当てる

2 単位科目 90 時間 / 15 週間

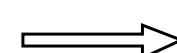


6 時間/週

ところが120 分を



90 分で置換



4.5 時間/週

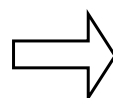
最低限必要

4.5 時間/週
の内訳

授業 90 分

復習 90 分

予習 90 分



授業 90 分

復習 160 分

予習 20 分

reportを含む

復習を十分に！

手を動かす

式を書く

図を描く

イメージする

眺めていると理解できなくなる

授業予定

- | | |
|-----------------|------------------------|
| 1. 10/1 (月) 1章 | 9. 11/1 (木) 石井先生 6章 |
| 2. 10/4 (木) 2章 | 10. 11/5 (月) 石井先生 7章 |
| 3. 10/11 (木) 2章 | 11. 11/8 (木) 石井先生 8章 |
| 4. 10/15 (月) 3章 | 12. 11/12 (月) 8章 |
| 5. 10/18 (木) 3章 | 13. 11/15 (木) 9章 |
| 6. 10/22 (月) 4章 | 14. 11/19 (月) テスト あるいは |
| 7. 10/25 (木) 4章 | 15. 11/22 (木) テスト? |
| 8. 10/29 (月) 5章 | |

1 章 ベクトルと座標系

1.1 ベクトル

1.2 内積と外積

1.2.1 内積

1.2.2 外積

1.3 代表的な座標系

1.3.1 円筒座標系

1.3.2 球座標系

1.4 線素・面素・体積素

1.4.1 線素

1.4.2 面素

1.4.3 体積素

1.1 ベクトル

1.1 ベクトル

(1) スカラーとベクトル

スカラー: 大きさを指定すれば決まる量

ベクトル: 大きさと向きを指定すれば決まる量

(2) ベクトルの表記

太字表記: A, B, C, a, b, c

手書きの場合は文字の一部を二重化: $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$

大きさ表記: $|A|$

混乱が生じない範囲で 細字で表記: A

(3) 基本ベクトル: $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$

x, y, z 軸の正の方向を向いた大きさ 1 のベクトル

(4) ベクトルの成分表示

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} \\ &= A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \overline{OP} = \sqrt{\overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2} \\ &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

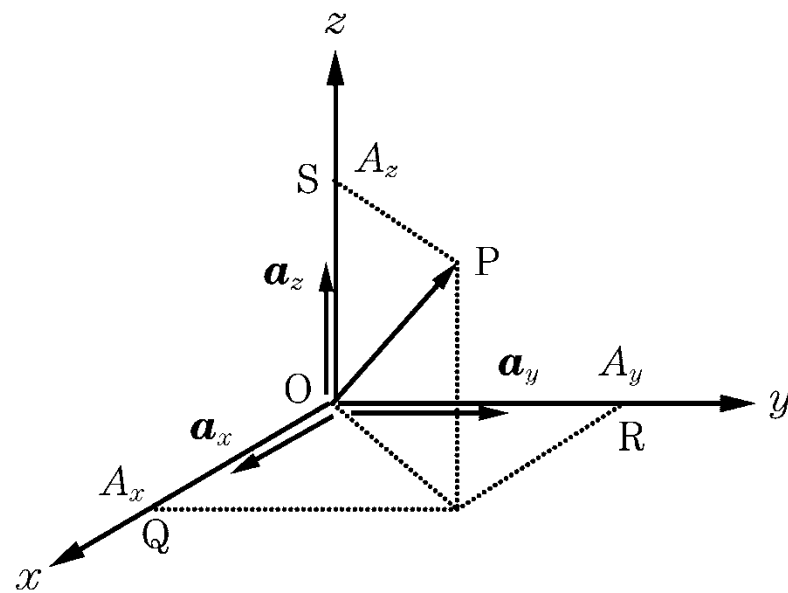


図 1.1 ベクトルの成分表示

(5) ベクトルの和

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) + (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= (A_x + B_x) \mathbf{a}_x + (A_y + B_y) \mathbf{a}_y + (A_z + B_z) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.3)$$

(6) ベクトルのスカラー倍

$$\begin{aligned} k\mathbf{A} &= k(A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \\ &= (kA_x) \mathbf{a}_x + (kA_y) \mathbf{a}_y + (kA_z) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.4)$$

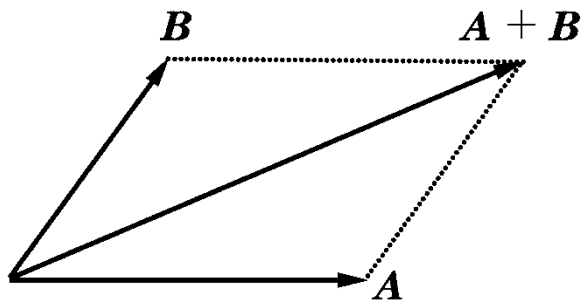


図 1.2 ベクトルの和

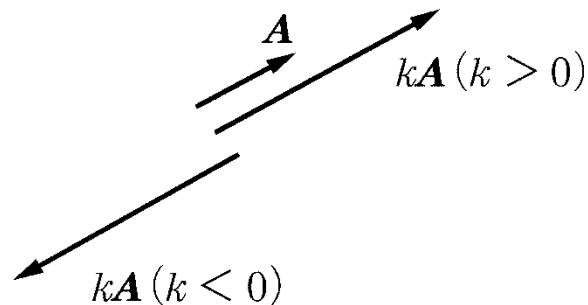


図 1.3 ベクトルのスカラー倍

(7) 単位ベクトル: 大きさ 1 のベクトル (向きは任意)

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad (1.5)$$

【注意】単位ベクトルと基本ベクトルを混用しないこと！

(8) 位置ベクトル

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z \quad (1.6)$$

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.7)$$

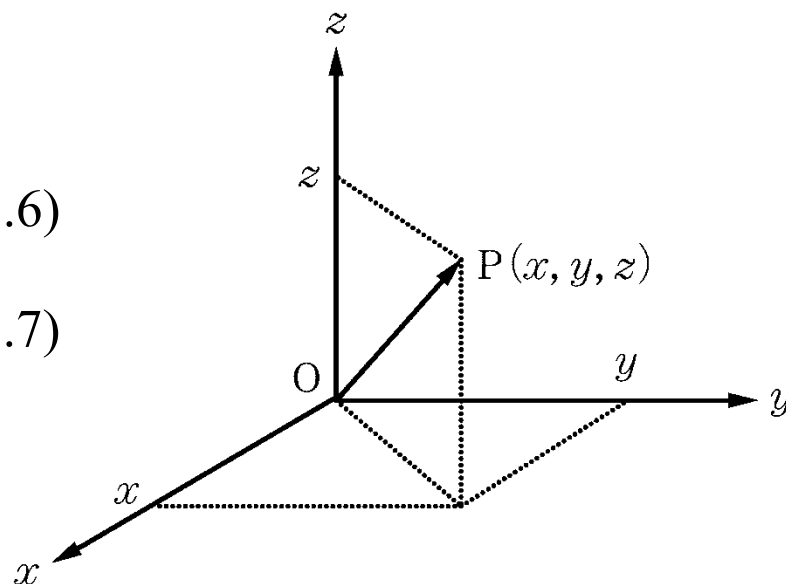


図 1.4 位置ベクトル

1.2 内積と外積

1.2.1 内積

(1) 内積の定義

$$A \cdot B = |A||B|\cos\theta \quad (1.8)$$

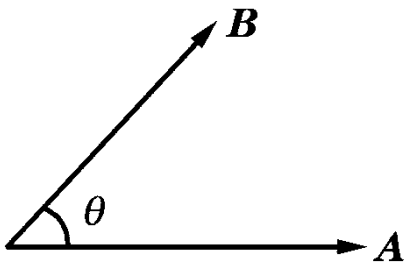


図 1.5 ベクトルの内積

(2) 内積の交換性

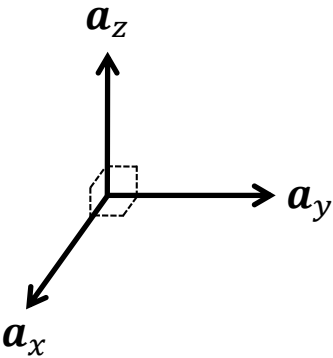
$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1.9)$$

(3) 基本ベクトル同士の内積

	a_x	a_y	a_z
$a_x \cdot$	1	0	0
$a_y \cdot$	0	1	0
$a_z \cdot$	0	0	1



$$a_y \cdot a_z = 0$$



(4) 内積の成分表示

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\
 &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\mathbf{A}|^2 \tag{1.11}$$

(5) ベクトルの成分抽出

$$\begin{aligned}
 A_l &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_l = |\mathbf{A}| |\mathbf{a}_l| \cos \theta_l = |\mathbf{A}| \cos \theta_l \\
 &(\because |\mathbf{a}_l| = 1)
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

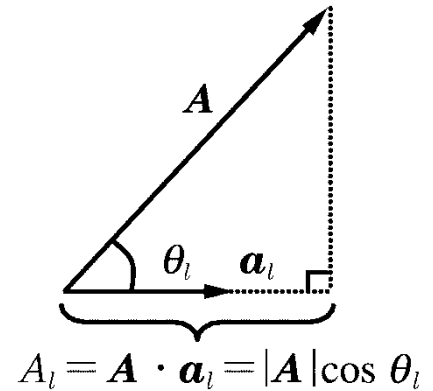


図 1.6 ベクトルの成分抽出

(5') ベクトルの成分分解

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \\
 &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_y + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z) \mathbf{a}_z
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.2.2 外積

(1) 外積の定義

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin \theta)\mathbf{a}_n \quad (1.14)$$

$\mathbf{a}_n$ は, $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ へ右ねじを回すとき,
ねじの進む向きの単位ベクトル

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin \theta|$$

$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ がなす平行四辺形の面積

(2) 外積の反交換性

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.15)$$

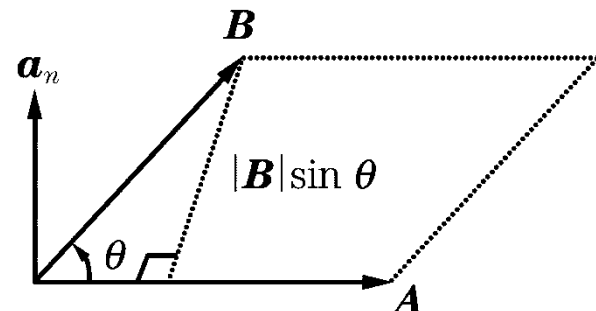
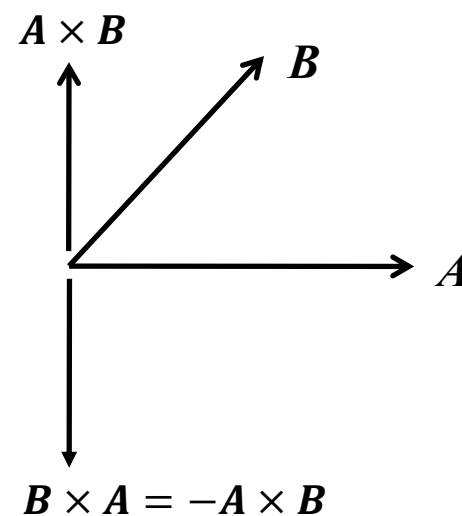


図 1.7 ベクトルの外積

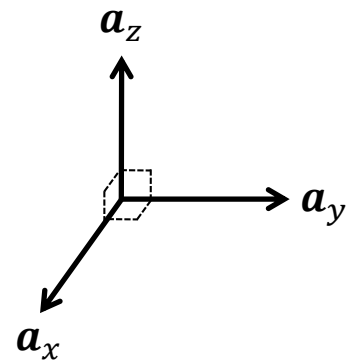


(3) 基本ベクトル同士の外積

	$\mathbf{a}_x$	$\mathbf{a}_y$	$\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_x \times$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{a}_z$	$-\mathbf{a}_y$
$\mathbf{a}_y \times$	$-\mathbf{a}_z$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{a}_x$
$\mathbf{a}_z \times$	$\mathbf{a}_y$	$-\mathbf{a}_x$	$\mathbf{0}$



$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$$



(4) 外積の成分表示

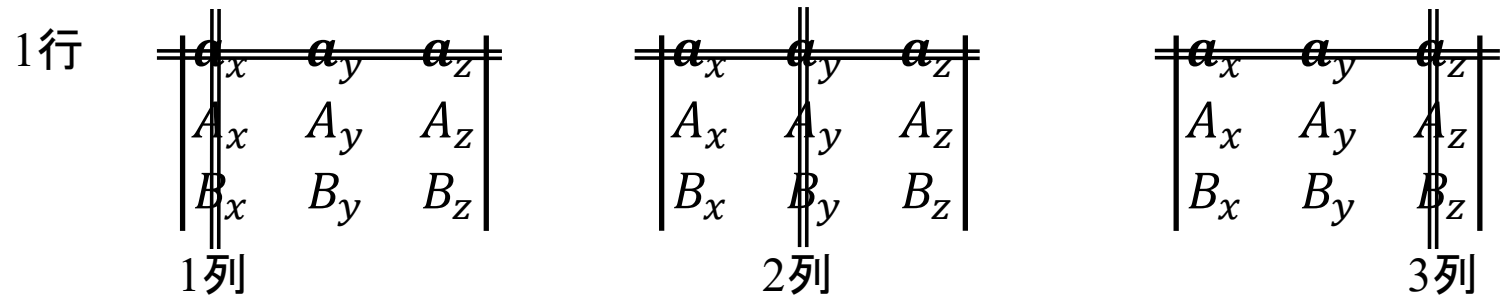
$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \times (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\
 &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{a}_z \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

行列式の余因子展開（サラスの方法は使わない！）

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \mathbf{a}_x \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \mathbf{a}_y \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \mathbf{a}_z \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(-1)^{行数+列数}

小行列式の計算



※ 要点がわかるベクトル解析 付録 A.1 行列式の展開 (pp.112 – 116 参照)

(5a) スカラー三重積

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.17)$$

$|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$ の意味

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ のなす

平行六面体の体積

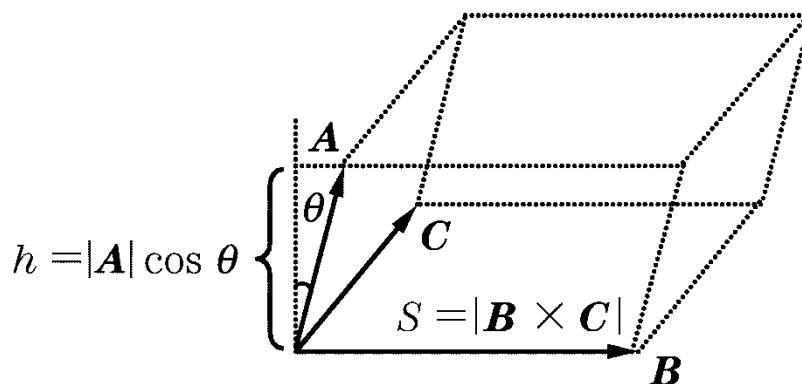


図 1.8 スカラー三重積

(5b) ベクトル三重積

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.19)$$

【注意】一般に $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

1.3 代表的な座標系

(1) 代表的な座標系

- (a) 直角座標系
- (b) 円筒座標系 … 軸(線)対称構造に対して適用
- (c) 球座標系 … 球(点)対称構造に対して適用

(2) 基本ベクトルの再定義

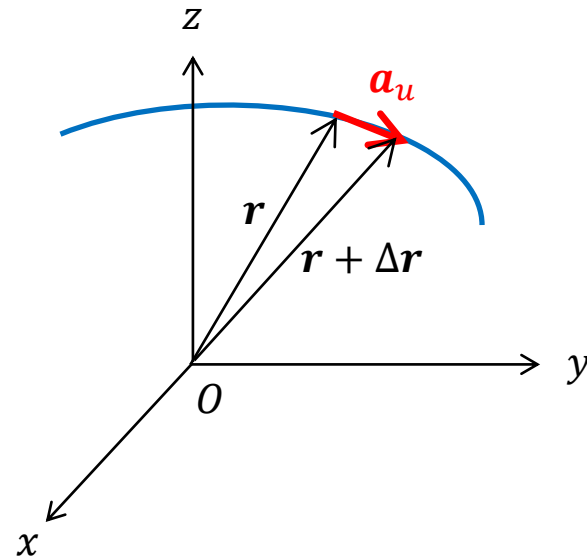
基本ベクトルの向き

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{r}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta u}$$

単位ベクトル化

$$\mathbf{a}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| \quad (1.20)$$

座標値 u が増える方向の単位ベクトル



1.3.1 円筒座標系 (ρ, ϕ, z)

(0) 直角座標系との関係

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (1.21a,b)$$

z は直角座標系の z と共通

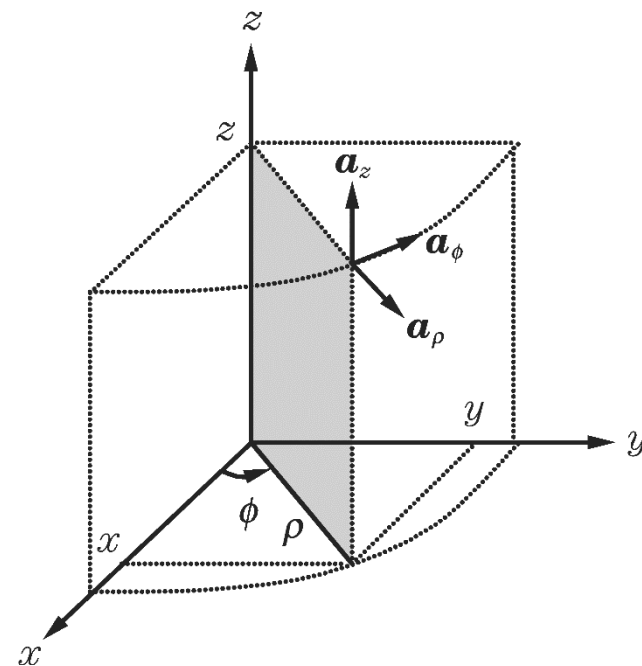


図 1.9 円筒座標系

(1) 基本ベクトル $\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\phi, \mathbf{a}_z$

$$\mathbf{a}_\rho = \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y \quad (1.23a,b)$$

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

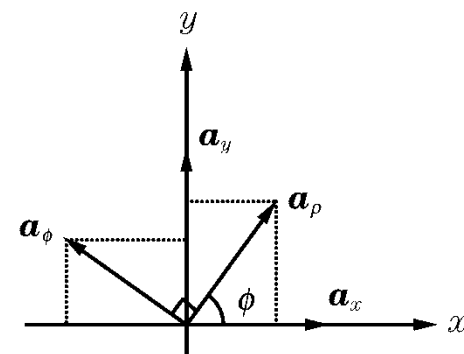


図 1.10 直角座標系と円筒座標系の関係

(1') 直角座標系と円筒座標系の基本ベクトルの間の関係

	a_ρ	a_ϕ	a_z
$a_x \cdot$	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	0
$a_y \cdot$	$\sin \phi$	$\cos \phi$	0
$a_z \cdot$	0	0	1

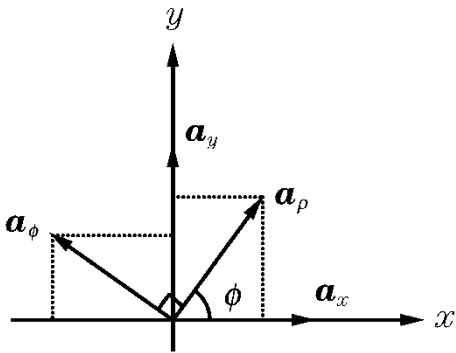
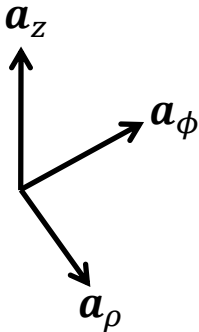


図 1.10 直角座標系と円筒座標系の関係

(2) 基本ベクトル同士の内積と外積

	a_ρ	a_ϕ	a_z
$a_\rho \cdot$	1	0	0
$a_\phi \cdot$	0	1	0
$a_z \cdot$	0	0	1

	a_ρ	a_ϕ	a_z
$a_\rho \times$	0	a_z	$-a_\phi$
$a_\phi \times$	$-a_z$	0	a_ρ
$a_z \times$	a_ϕ	$-a_\rho$	0



(3) ベクトルの成分表示

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \\
 &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho) \mathbf{a}_\rho + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi) \mathbf{a}_\phi + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z) \mathbf{a}_z
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

(3') 成分間の関係

$$\begin{aligned}
 A_\rho &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\rho \\
 &= A_x (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho) + A_y (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho) + A_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho) = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_\phi &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi \\
 &= A_x (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi) + A_y (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi) + A_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi) = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_z &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_z \\
 &= A_x (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z) + A_y (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z) + A_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z) = A_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_x &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x = (A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_x \\
 &= A_\rho (\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_x) + A_\phi (\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x) + A_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x) = A_\rho \cos \phi - A_\phi \sin \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_y &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y = (A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_y \\
 &= A_\rho (\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_y) + A_\phi (\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y) + A_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y) = A_\rho \sin \phi + A_\phi \cos \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_z &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z = (A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_z \\
 &= A_\rho (\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_z) + A_\phi (\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z) + A_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z) = A_z
 \end{aligned}$$

(3'') 基本ベクトルおよび成分間の関係(まとめ)

$$\begin{cases} \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_x \cos \phi + \mathbf{a}_y \sin \phi \\ \mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x \sin \phi + \mathbf{a}_y \cos \phi \\ \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_\rho = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi \\ A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \\ A_z = A_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_\rho \cos \phi - \mathbf{a}_\phi \sin \phi \\ \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_\rho \sin \phi + \mathbf{a}_\phi \cos \phi \\ \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = A_\rho \cos \phi - A_\phi \sin \phi \\ A_y = A_\rho \sin \phi + A_\phi \cos \phi \\ A_z = A_z \end{cases}$$

	$\mathbf{a}_\rho$	$\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	0
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin \phi$	$\cos \phi$	0
$\mathbf{a}_z \cdot$	0	0	1

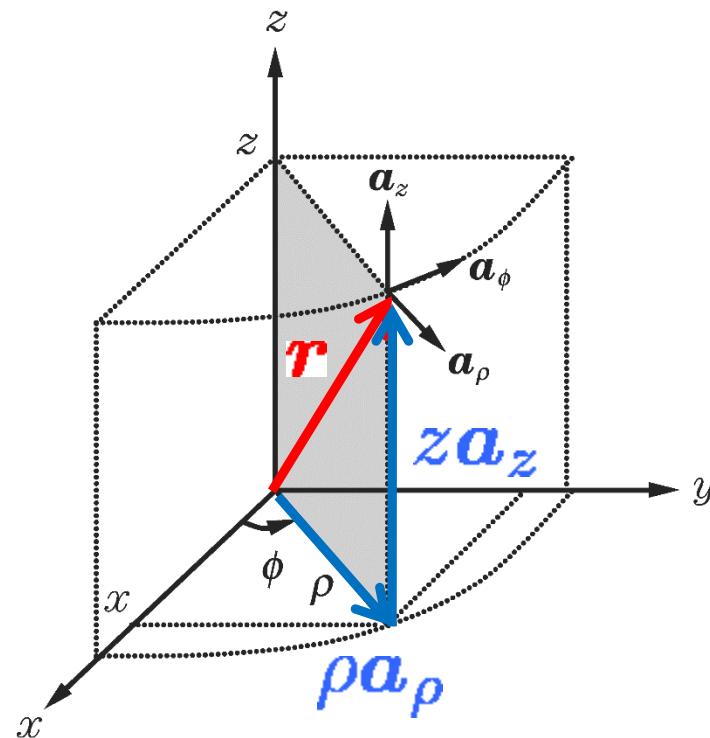
	A_ρ	A_ϕ	A_z
A_x	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	0
A_y	$\sin \phi$	$\cos \phi$	0
A_z	0	0	1

(4) 位置ベクトルの成分表示

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{a}_\rho + z \mathbf{a}_z \quad (1.25)$$

〔直角座標系における
位置ベクトルとの関係〕

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z \\ &= \rho \cos \phi \mathbf{a}_x + \rho \sin \phi \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z \\ &= \rho (\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y) + z \mathbf{a}_z \\ &= \rho \mathbf{a}_\rho + z \mathbf{a}_z \end{aligned}$$



1.3.2 球座標系 (r, θ, ϕ)

(0) 直角・円筒座標系との関係

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}/z)$$

$$x = \overset{\rho}{r \sin \theta} \cos \phi$$

$$y = \overset{\rho}{r \sin \theta} \sin \phi \quad (1.26a,b,c)$$

$$z = r \cos \theta$$

ϕ は円筒座標系の ϕ と共通

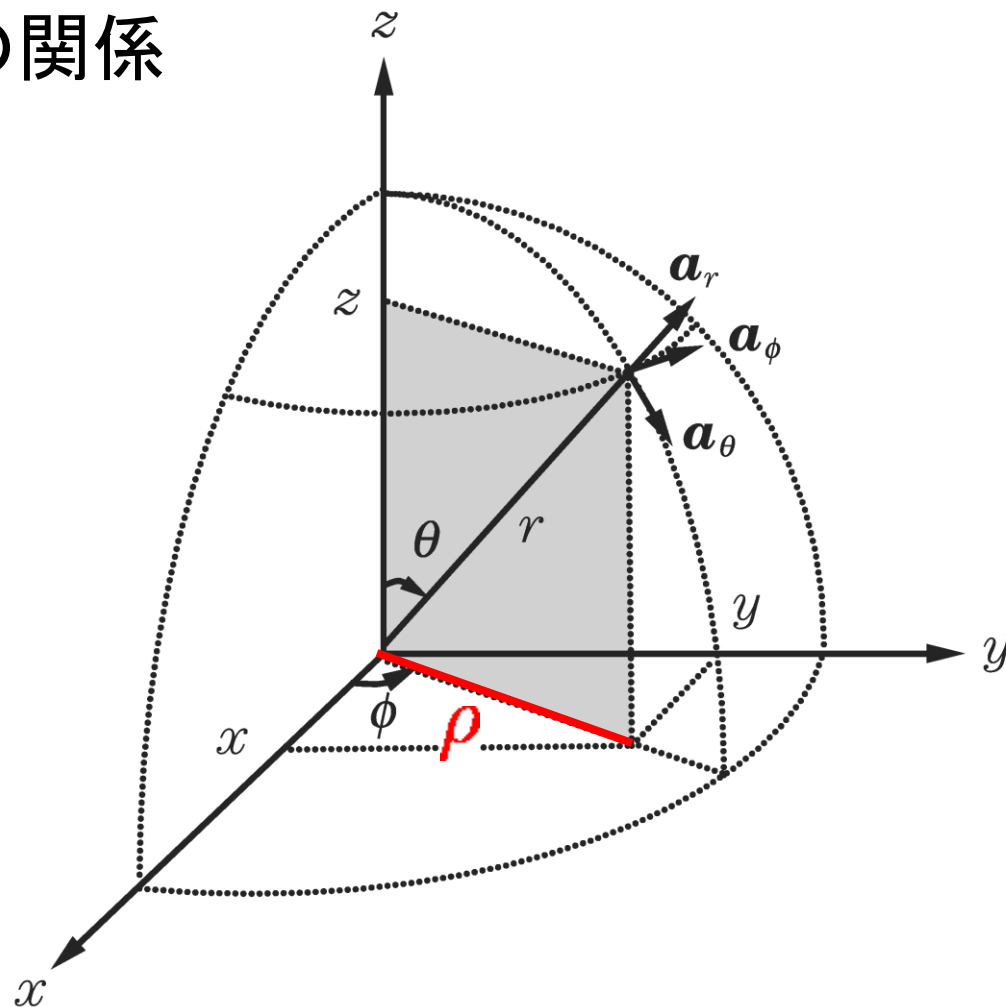


図 1.11 球座標系

(0') 円筒座標系と球座標系の基本ベクトルの間の関係

$$\mathbf{a}_r = \sin \theta \mathbf{a}_\rho + \cos \theta \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \theta \mathbf{a}_\rho - \sin \theta \mathbf{a}_z \quad (*)$$

$$\mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\phi$$

表にまとめると

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_\rho \cdot$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0
$\mathbf{a}_\phi \cdot$	0	0	1
$\mathbf{a}_z \cdot$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

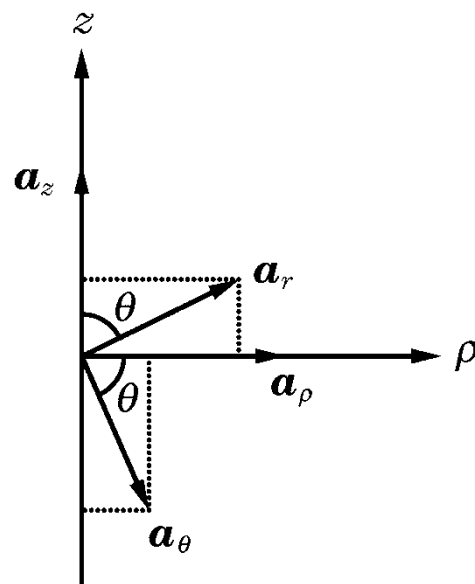


図 1.12 円筒座標系と球座標系の関係

(*)に
$$\begin{cases} \mathbf{a}_\rho = \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \end{cases}$$
 の関係を代入すると

直角座標系と球座標系の基本ベクトルの間の関係が得られる(次のスライド)。

(1) 基本ベクトル $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\phi$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y\end{aligned}\tag{1.28a,b,c}$$

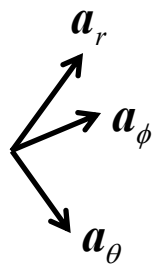
(1') 直角座標系と球座標系の基本ベクトルの間の関係

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
$\mathbf{a}_z \cdot$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

(2) 基本ベクトル同士の内積と外積

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_r \cdot$	1	0	0
$\mathbf{a}_\theta \cdot$	0	1	0
$\mathbf{a}_\phi \cdot$	0	0	1

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_r \times$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{a}_\phi$	$-\mathbf{a}_\theta$
$\mathbf{a}_\theta \times$	$-\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{a}_r$
$\mathbf{a}_\phi \times$	$\mathbf{a}_\theta$	$-\mathbf{a}_r$	$\mathbf{0}$



(3) ベクトルの成分表示

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi \\
 &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\theta) \mathbf{a}_\theta + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi) \mathbf{a}_\phi \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

(3') 成分間の関係

$$\begin{aligned}
 A_r &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_r = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_r = A_x (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r) + A_y (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r) + A_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r) \\
 &= A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_\theta &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\theta = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\theta = A_x (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta) + A_y (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta) + A_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta) \\
 &= A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_\phi &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi) + A_y (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi) + A_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi) \\
 &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_x &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x = (A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi) \cdot \mathbf{a}_x = A_r (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x) + A_\theta (\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_x) + A_\phi (\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x) \\
 &= A_r \sin \theta \cos \phi + A_\theta \cos \theta \cos \phi - A_\phi \sin \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_y &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y = (A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi) \cdot \mathbf{a}_y = A_r (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y) + A_\theta (\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_y) + A_\phi (\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y) \\
 &= A_r \sin \theta \sin \phi + A_\theta \cos \theta \sin \phi + A_\phi \cos \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_z &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z = (A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi) \cdot \mathbf{a}_z = A_r (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z) + A_\theta (\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_z) + A_\phi (\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z) \\
 &= A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta
 \end{aligned}$$

(3'') 基本ベクトルおよび成分間の関係(まとめ)

$$\begin{cases} \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_x \sin \theta \cos \phi + \mathbf{a}_y \sin \theta \sin \phi + \mathbf{a}_z \cos \theta \\ \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_x \cos \theta \cos \phi + \mathbf{a}_y \cos \theta \sin \phi - \mathbf{a}_z \sin \theta \\ \mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x \sin \phi + \mathbf{a}_y \cos \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_r = A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta \\ A_\theta = A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta \\ A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_r \sin \theta \cos \phi + \mathbf{a}_\theta \cos \theta \cos \phi - \mathbf{a}_\phi \sin \phi \\ \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_r \sin \theta \sin \phi + \mathbf{a}_\theta \cos \theta \sin \phi + \mathbf{a}_\phi \cos \phi \\ \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r \cos \theta - \mathbf{a}_\theta \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = A_r \sin \theta \cos \phi + A_\theta \cos \theta \cos \phi - A_\phi \sin \phi \\ A_y = A_r \sin \theta \sin \phi + A_\theta \cos \theta \sin \phi + A_\phi \cos \phi \\ A_z = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta \end{cases}$$

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
$\mathbf{a}_z \cdot$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

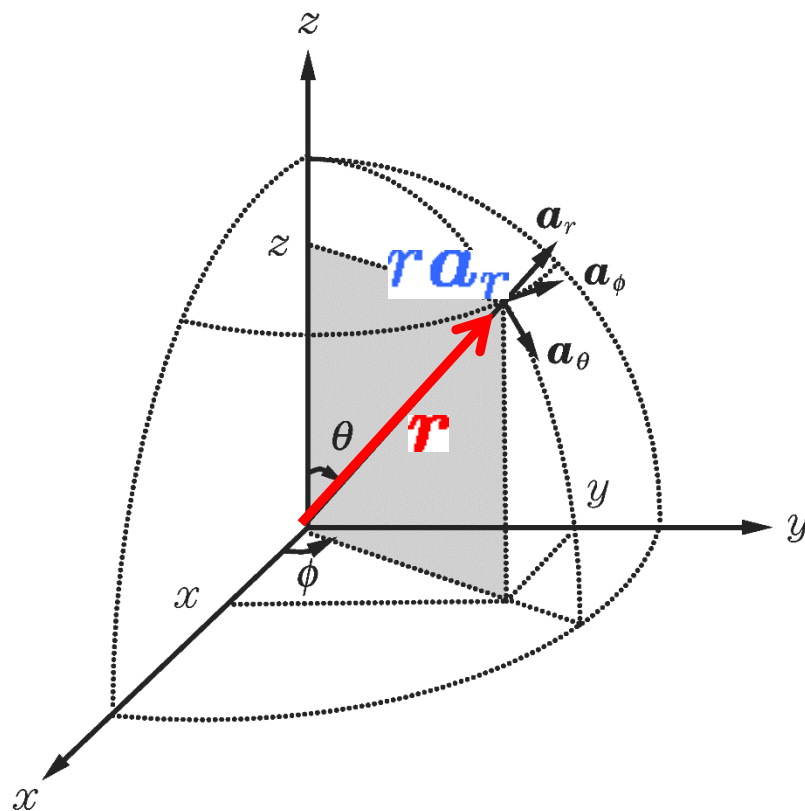
	A_r	A_θ	A_ϕ
A_x	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
A_y	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
A_z	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

(4) 位置ベクトルの成分表示

$$\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r \quad (1.30)$$

[直角座標系における
位置ベクトルとの関係]

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z \\ &= r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + r \cos \theta \mathbf{a}_z \\ &= r(\sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z) \\ &= r\mathbf{a}_r \end{aligned}$$



1.4 線素・面素・体積素

直角座標系の線素・面素・体積素 (1)

(1) 線素

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z \quad (1.33)$$

(2) 面素

$$d\mathbf{S}_x = dydz\mathbf{a}_x$$

$$d\mathbf{S}_y = dzdx\mathbf{a}_y \quad (1.37a,b,c)$$

$$d\mathbf{S}_z = dxdy\mathbf{a}_z$$

(3) 体積素

$$dv = dxdydz \quad (1.41)$$

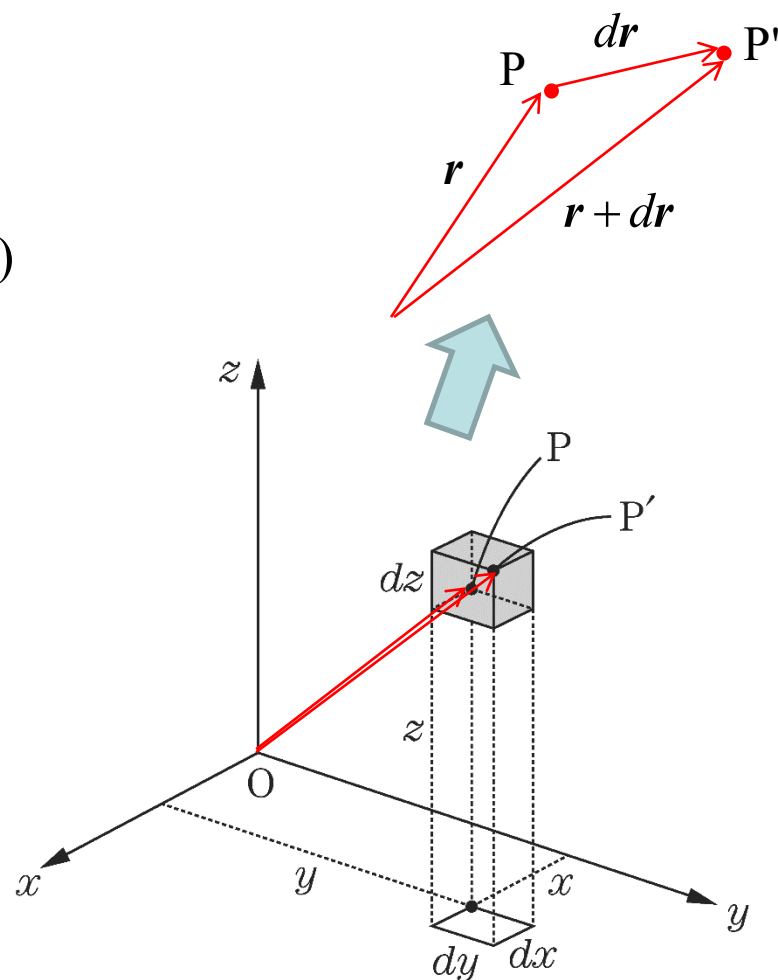
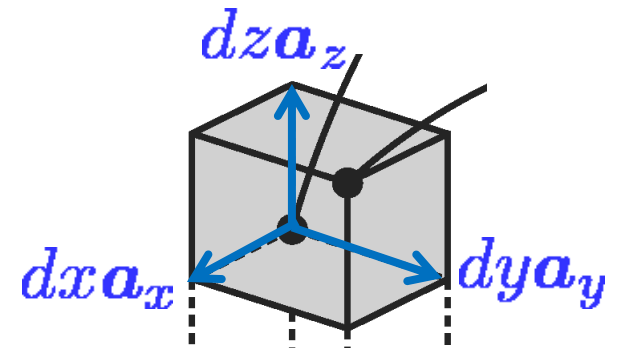


図 1.13 直角座標系の線素・面素・体積素

直角座標系の線素・面素・体積素 (2)

(1) 線素

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z \quad (1.33)$$

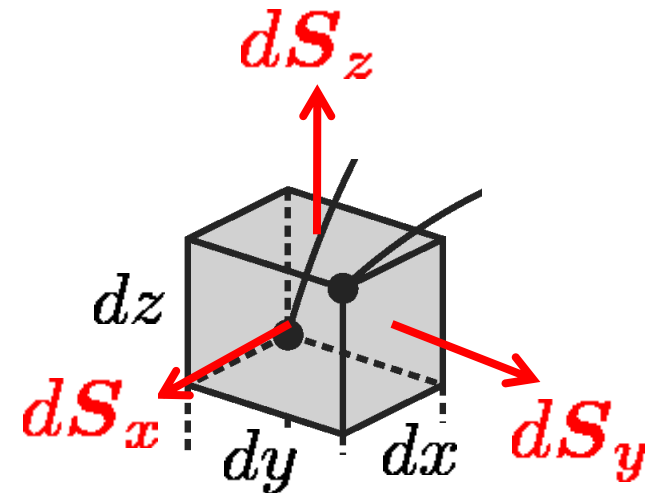


(2) 面素

$$d\mathbf{S}_x = dydz\mathbf{a}_x$$

$$d\mathbf{S}_y = dzdx\mathbf{a}_y \quad (1.37a,b,c)$$

$$d\mathbf{S}_z = dxdy\mathbf{a}_z$$



(3) 体積素

$$dv = dxdydz \quad (1.41)$$

円筒座標系の線素・面素・体積素 (1)

(1) 線素

$$d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z \quad (1.34)$$

(2) 面素

$$d\mathbf{S}_\rho = \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho$$

$$d\mathbf{S}_\phi = d\rho dz \mathbf{a}_\phi \quad (1.38a,b,c)$$

$$d\mathbf{S}_z = \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z$$

(3) 体積素

$$dv = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.42)$$

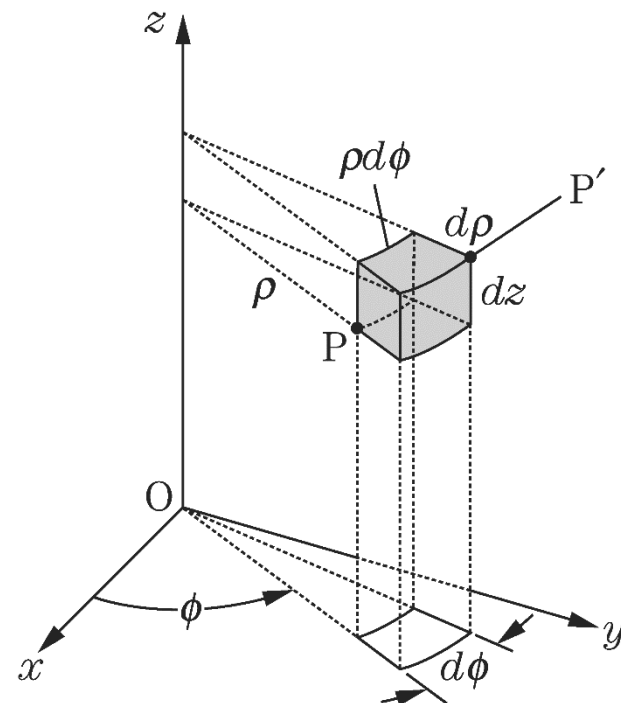


図 1.14 円筒座標系の線素・面素・体積素

円筒座標系の線素・面素・体積素 (2)

(1) 線素

$$d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z \quad (1.34)$$

(2) 面素

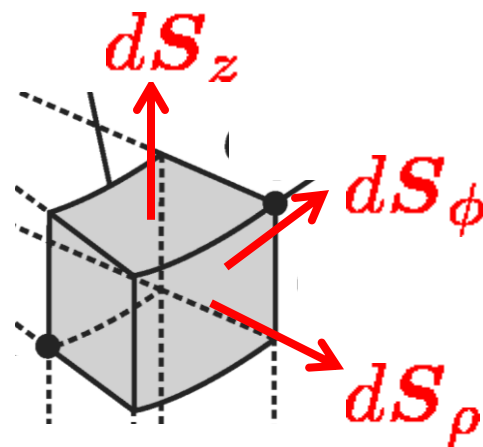
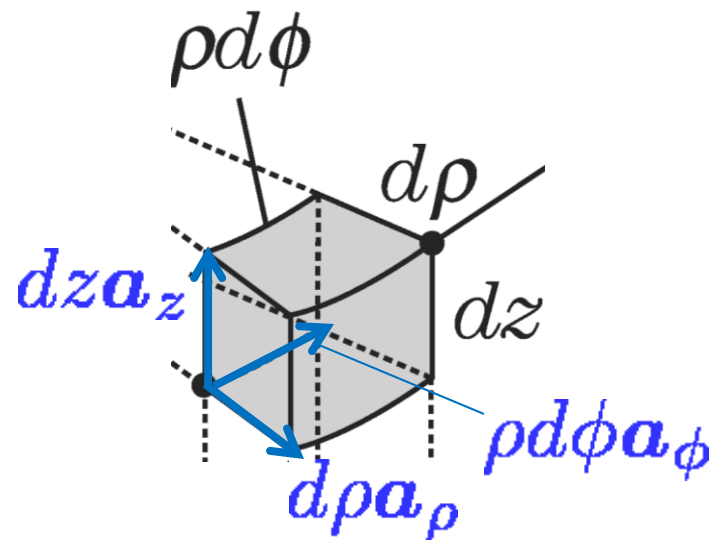
$$d\mathbf{S}_\rho = \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho$$

$$d\mathbf{S}_\phi = d\rho dz \mathbf{a}_\phi \quad (1.38a,b,c)$$

$$d\mathbf{S}_z = \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z$$

(3) 体積素

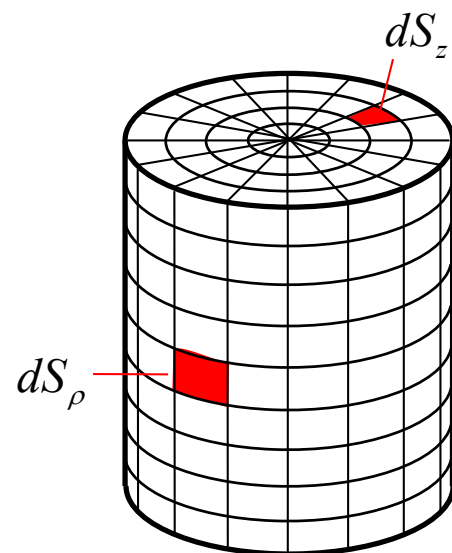
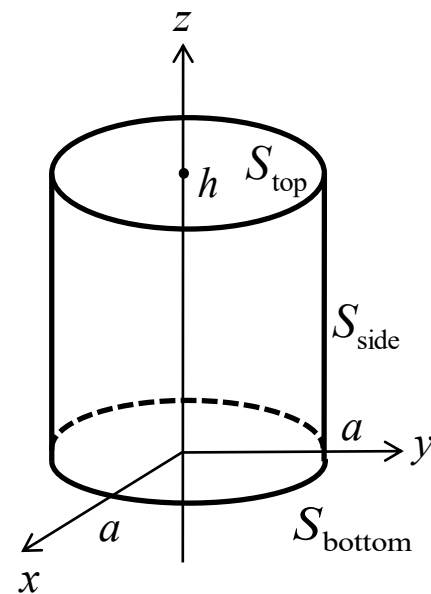
$$dv = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.42)$$



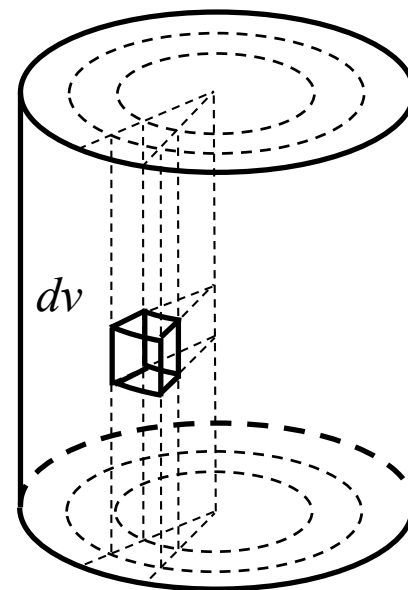
《例題》 円柱の (1) 表面積および (2) 体積を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad S &= S_{\text{top}} + S_{\text{bottom}} + S_{\text{side}} \\
 &= \iint_{\text{top}} dS_z + \iint_{\text{bottom}} dS_z + \iint_{\text{side}} dS_\rho \\
 &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \rho d\rho d\phi + \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \rho d\rho d\phi \\
 &\quad + \int_{z=0}^h \int_{\phi=0}^{2\pi} a d\phi dz \\
 &= \dots = \pi a^2 + \pi a^2 + 2\pi a h = 2\pi a(a + h)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(2) \quad V &= \iiint_v dv = \int_{z=0}^h \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \rho d\rho d\phi dz \\ &= \int_{z=0}^h dz \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\rho=0}^a \rho d\rho \cdots = \pi a^2 h\end{aligned}$$



球座標系の線素・面素・体積素 (1)

(1) 線素

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi \quad (1.35)$$

(2) 面素

$$d\mathbf{S}_r = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$

$$d\mathbf{S}_\theta = r \sin\theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta \quad (1.39a,b,c)$$

$$d\mathbf{S}_\phi = r dr d\theta \mathbf{a}_\phi$$

(3) 体積素

$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (1.43)$$

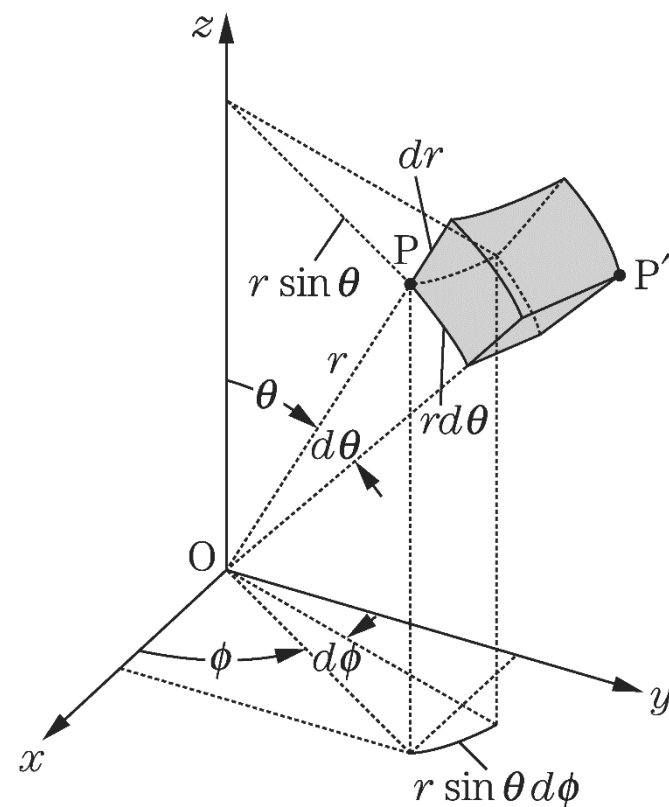


図 1.15 球座標系の線素・面素・体積素

球座標系の線素・面素・体積素 (2)

(1) 線素

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi \quad (1.35)$$

(2) 面素

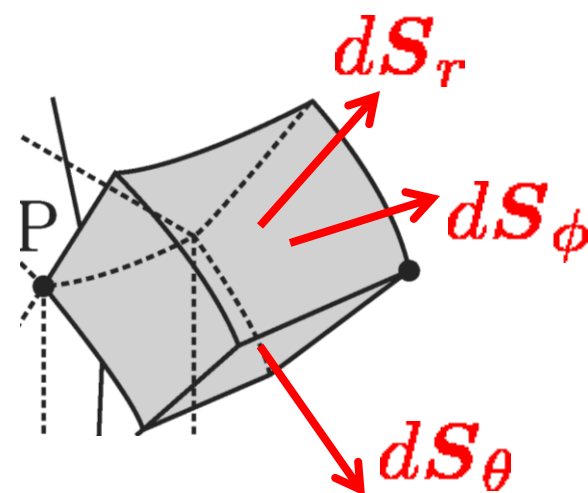
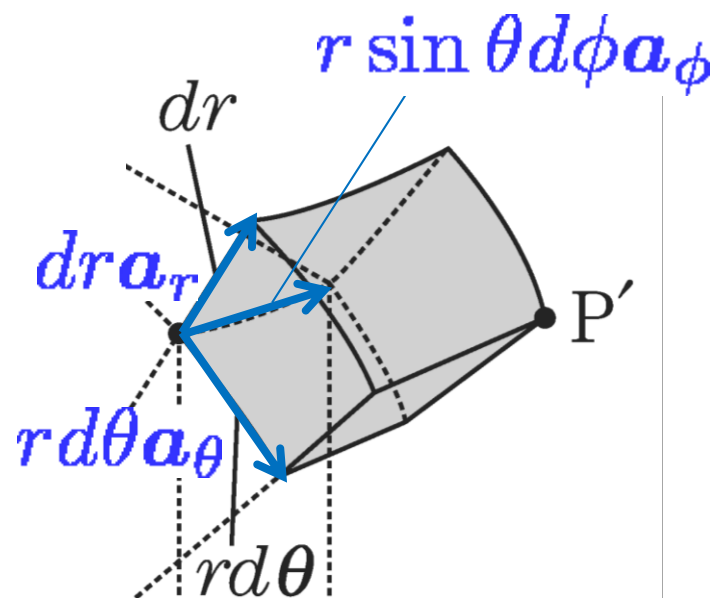
$$d\mathbf{S}_r = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$

$$d\mathbf{S}_\theta = r \sin\theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta \quad (1.39a,b,c)$$

$$d\mathbf{S}_\phi = r dr d\theta \mathbf{a}_\phi$$

(3) 体積素

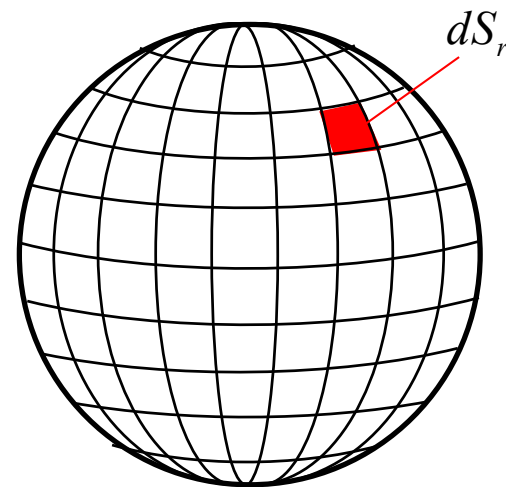
$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (1.43)$$



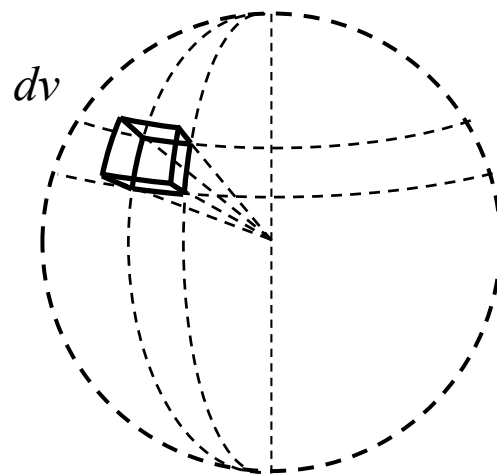
《例題》 球の (1) 表面積および (2) 体積を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad S &= \iint_S dS_r = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = a^2 \left[\phi \right]_0^{2\pi} \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \\
 &= a^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi a^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (2) \quad V &= \iiint_v dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a r^2 dr \\
 &= \left[\phi \right]_0^{2\pi} \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3
 \end{aligned}$$



2章 クーロンの法則

2.1 電荷分布

2.1.1 電荷の定義

2.1.2 電荷分布とその数学的表現

2.2 クーロンの法則

2.3 電荷分布と電界

2.3.1 点電荷による電界の定義

2.3.2 連続的な電荷分布による電界

2.3.3 代表的な電荷分布による電界



クーロン (1736-1806)

2.1 電荷分布

(1) 静的 … 時刻 t に関する変化がない ($\partial/\partial t = 0$)

周波数 (= 振動数) 0Hzとなる状態

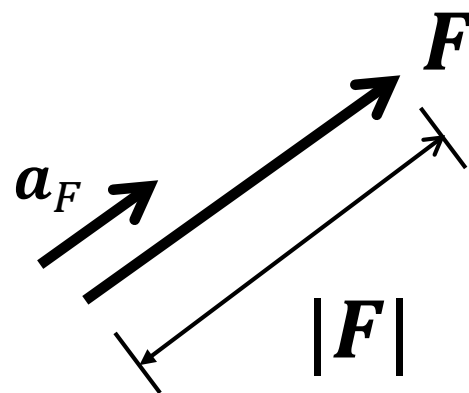
(2) 自由空間 … 物質が存在しない仮想的な空間

(ウィキペディア (Wikipedia) より)

(3) ベクトルの表現

大きさ $|F|$ と向き a_F (単位ベクトル) により表現する。

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}| \mathbf{a}_F$$



2.1.1 電荷の定義

電気(電荷)の性質

- ① 電気は2種類存在する。一方に正(+), 他方に負(-)の符号をつける。
- ② 異種の電気を帯びた二つの物体は互いに引き合う。
- ③ 同種の電気を帯びた二つの物体は互いに反発し合う。
- ④ 帯電していない物体は, 両種の電気を等量ずつ含み, 外部に対して何ら電氣的性質を表さない。摩擦などによって, これら両種の電気が分離される。



電荷 … 帯電体(電気を帯びた物体)の持つ電気
正負いずれかの値を持つスカラー量であり,
単位はクーロン[C]である。

2.1.2 電荷分布とその数学的表現

(1) 点電荷分布

… 複数の離散的な点に電荷が集中して存在

点 P_i を指定して電荷 Q_i を配置することで記述される。

ある領域に含まれる全電荷

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i Q_i \\ &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \cdots \end{aligned}$$

(2) 線電荷分布

… ある曲線に沿って連続的に電荷が存在

単位長さ当りの電荷として定義される線電荷密度 ρ_l によって記述される。線電荷密度の単位は[C/m]である。

線素 $d\mathbf{r}$ に含まれる電荷

$$dQ = \rho_l dl = \rho_l |d\mathbf{r}|$$

曲線 C 上に含まれる全電荷

$$Q = \int_C \rho_l dl \quad (2.1)$$

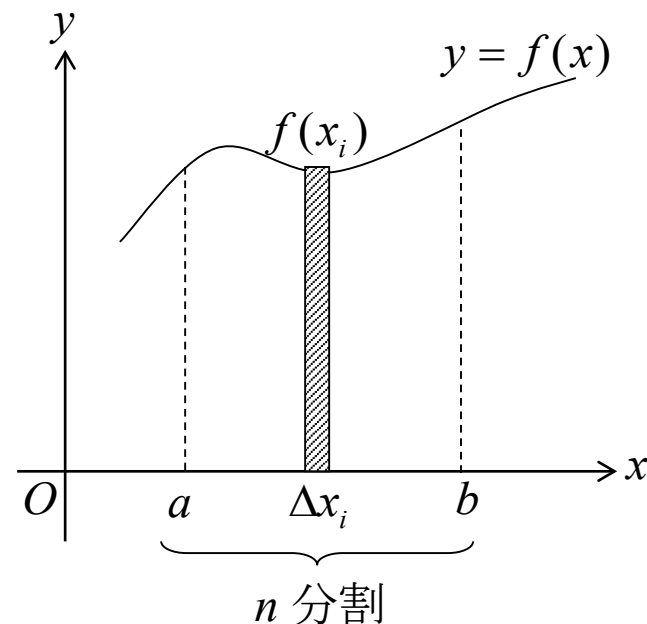
線積分

【線積分について】

・定積分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

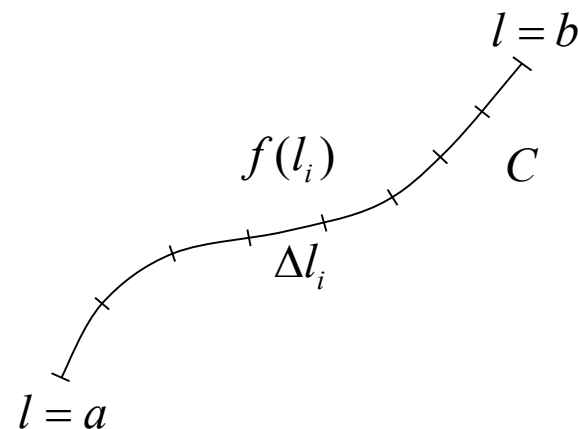
閉区間 $[a, b]$ を微小区間に分割し、微小長さ Δx_i ごとに積和を計算し、それらの総和を取る。



・線積分

$$\int_C f(l)dl = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(l_i) \Delta l_i$$

曲線 C を微小区間に分割し、微小長さ Δl_i ごとに積和を計算し、それらの総和を取る。



(3) 面電荷分布

… ある曲面上に連続的に電荷が存在

単位面積当りの電荷として定義される面電荷密度 ρ_s によって記述される。面電荷密度の単位は $[\text{C}/\text{m}^2]$ である。

面素 dS に含まれる電荷

$$dQ = \rho_s dS = \rho_s |d\mathbf{S}|$$

曲面 S に含まれる全電荷

$$Q = \iint_S \rho_s dS \quad (2.2)$$

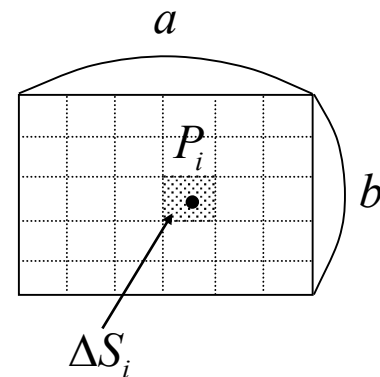
面積分

【面積分について】

・2重積分

$$\int_0^b \int_0^a f(x, y) dx dy = \lim_{n_x, n_y \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

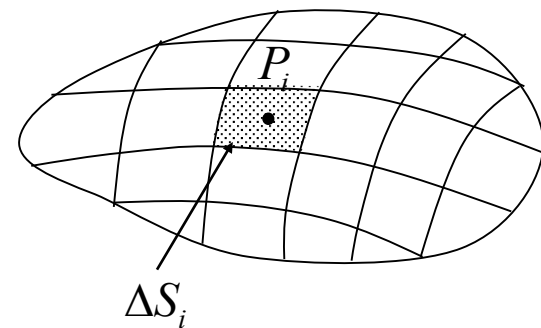
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$$



閉区間 $[0, a] \times [0, b]$ を微小区間に分割し、微小面積 $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$ ごとに積和を計算し、それらの総和を取る。

・面積分

$$\iint_S f(P) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i$$



曲面 S を微小面積に分割し、微小面積 ΔS_i ごとに積和を計算し、それらの総和を取る。

(4) 体積電荷分布

… ある(3次元)領域内に電荷が連続的に存在

単位体積当りの電荷として定義される体積電荷密度 ρ_v によって記述される。体積電荷密度の単位は $[\text{C}/\text{m}^3]$ である。

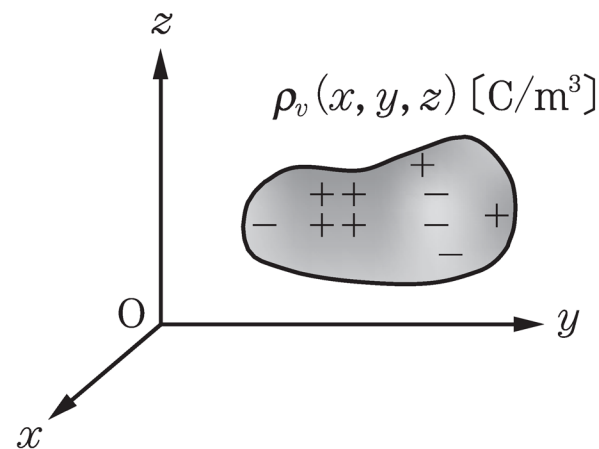
体積素 dv に含まれる電荷

$$dQ = \rho_v dv$$

領域 v 内に含まれる全電荷

$$Q = \iiint_v \rho_v dv \quad (2.3)$$

体積分



(d) 体積電荷分布

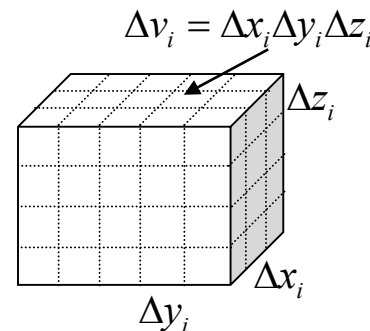
【体積分について】

・3重積分

$$\int_0^c \int_0^b \int_0^a f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{n_x, n_y, n_z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i$$

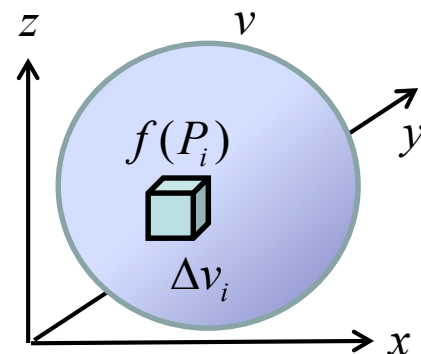
閉区間 $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ を微小区間に分割し、微小体積 $\Delta v_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ ごとに積和を計算し、それらの総和を取る。



・体積分

$$\iiint_v f(P) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta v_i$$

領域 v を微小体積に分割し、微小体積 Δv_i ごとに積和を計算し、それらの総和を取る。



(5) 一様分布

与えられた範囲で線電荷密度 ρ_l , 面電荷密度 ρ_s ,
体積電荷密度 ρ_v が一定である分布

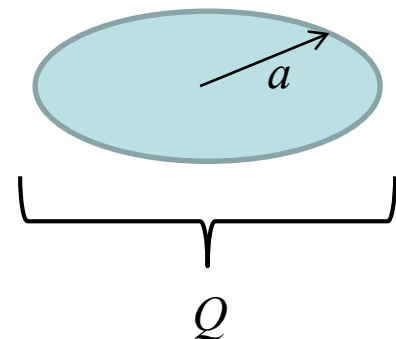
《例題》半径 a の円板上に電荷が一様に分布している。
全電荷を Q として, 面電荷密度 ρ_s を求めよ。

【解答】円板上では, 面電荷密度 ρ_s は一定値を示す。

$$Q = \iint_S \rho_s dS = \rho_s \iint_S dS = \rho_s \cdot \pi a^2$$

ゆえに

$$\rho_s = \frac{Q}{\pi a^2}$$



2.2 クーロンの法則

(1) クーロンの法則とそのベクトル表現

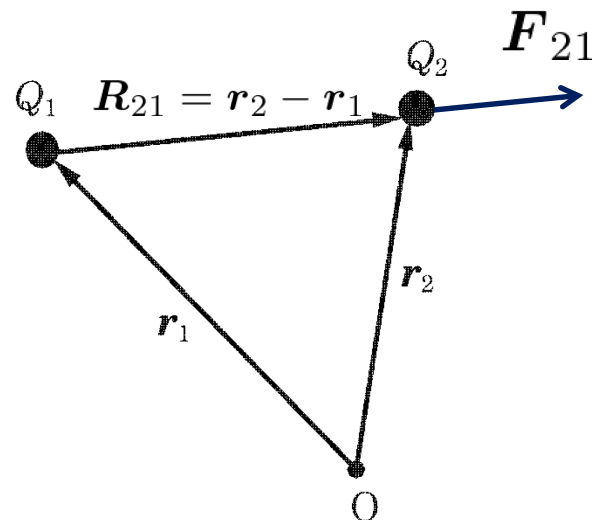
点電荷の間に作用する力に関する性質(クーロン)

- ① 力の大きさは, それぞれの電荷の積に比例する。 $\cdots Q_1 Q_2$
- ② 力の大きさは, それらの距離の二乗に反比例する。 $\cdots 1/R_{21}^2$
- ③ 力の方向は, それらを結んだ直線に沿う。
- ④ 同種の電荷の間に反発力が作用し,
異種の電荷の間に引力が作用する。

$$\mathbf{a}_{R_{21}} = \mathbf{R}_{21}/R_{21}$$

クーロンの法則

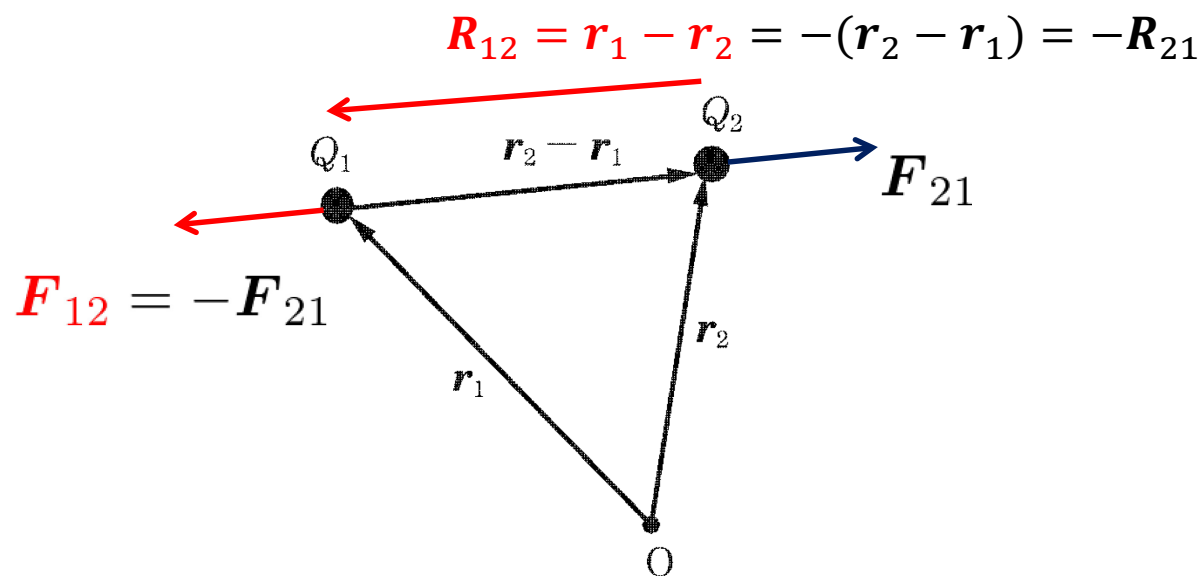
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21} &= k \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} \mathbf{a}_{R_{21}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \end{aligned} \quad (2.4)$$



自由空間の誘電率: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

(2) 作用・反作用の法則

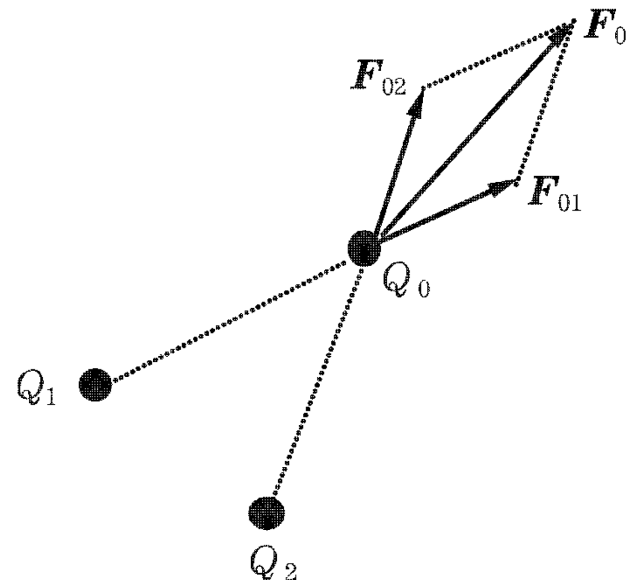
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} \\ &= -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} = -\mathbf{F}_{21} \end{aligned} \quad (2.5)$$



(3) 重ね合わせの原理(線形性)

- ・複数個の電荷による力は、それらのベクトル和で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathbf{F}_{01} + \mathbf{F}_{02} + \cdots + \mathbf{F}_{0n} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{0i} \quad (2.6) \end{aligned}$$



- ・電荷量が k 倍となるとき、作用する力も k 倍(スカラー倍)となる。

$$\frac{Q_1(kQ_2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} = k \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} = k \mathbf{F}_{21} \quad (2.7)$$

(3') 複数個の点電荷が存在するときのクーロンの法則の一般表現

点 $r_1, r_2, \dots, r_n$ に点電荷 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ が存在するとき, 点 r に存在する点電荷 Q に作用する力

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{Q_1 Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} + \frac{Q_2 Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} + \dots + \frac{Q_n Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_n}{R_n^3} \\ &= Q \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} \quad (2.8) \end{aligned}$$

ただし, $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$, $R_i = |\mathbf{R}_i|$ とする.

2.3 電荷分布と電界

2.3.1 点電荷による電界の定義

- ・電界の定義

- (a) クーロンの法則に従って電荷に力が作用する空間

- (b) 1Cの単位点電荷に作用する力, 単位[V/m]

- ・点電荷による電界 (観測点: $\mathbf{r}$, 点電荷の位置: $\mathbf{r}'$)

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.9)$$

- ・複数個の点電荷による電界 (重ね合わせの原理)

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (2.10)$$

2.3.2 連続的な電荷分布による電界

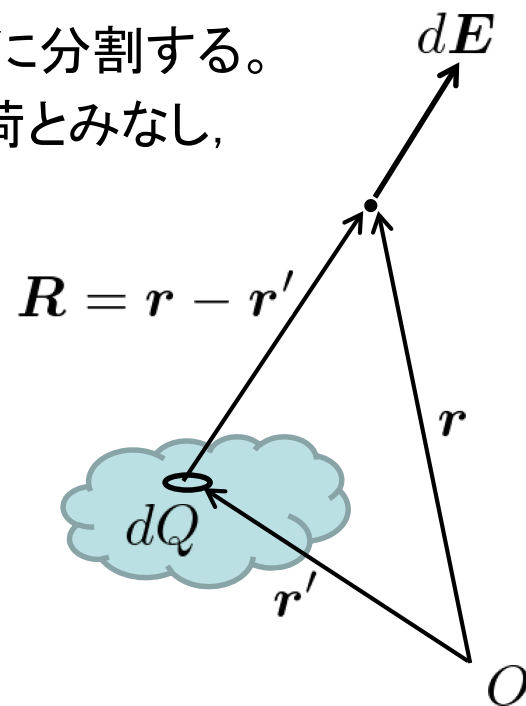
(1) 考え方

- [a] 電荷分布の存在する領域を線素, 面素, 体積素に分割する。
- [b] 線素, 面素, 体積素に含まれる電荷 dQ を点電荷とみなし, 微小電界を計算する。

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2.11)$$

- [c] 電荷分布の存在する領域で積分を行う。

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2.12)$$



電荷の分布形態により, 積分を線積分, 面積分, 体積分とする。

(2) 線電荷分布による電界

$$dQ = \rho_l(\mathbf{r}')dl' \quad \mathbf{E} = \int_C \frac{\rho_l(\mathbf{r}')dl'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2.13)$$

(3) 面電荷分布による電界

$$dQ = \rho_s(\mathbf{r}')dS' \quad \mathbf{E} = \iint_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}')dS'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2.14)$$

(4) 体積電荷分布による電界

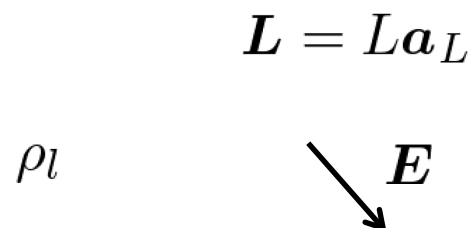
$$dQ = \rho_v(\mathbf{r}')dv' \quad \mathbf{E} = \iiint_v \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2.15)$$

2.3.3 代表的な電荷分布による電界

(1) 直線上に電荷が一様に分布する場合の電界

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 L} \mathbf{a}_L = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{L}}{L^2} \quad (2.17)$$

- ・大きさは、直線からの距離に反比例する。
- ・向きは、直線に対して垂直である。



(2) 平面上に電荷が一様に分布する場合の電界

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n \quad (2.20)$$

- ・大きさは、一定である。
- ・向きは、平面に垂直で、平面から遠ざかる向きである。



《例題2.1》 z 軸に沿って $-\infty < z < \infty$ に電荷が一様に分布している。線電荷密度を ρ_l とするとき、電界を計算せよ。

【解答】 z 軸上の線素に含まれる電荷は

$$dQ = \rho_l dl' = \rho_l dz'$$

である。 $\mathbf{r} = \rho \mathbf{a}_\rho + z \mathbf{a}_z$ であるから

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho \mathbf{a}_\rho + (z - z') \mathbf{a}_z$$

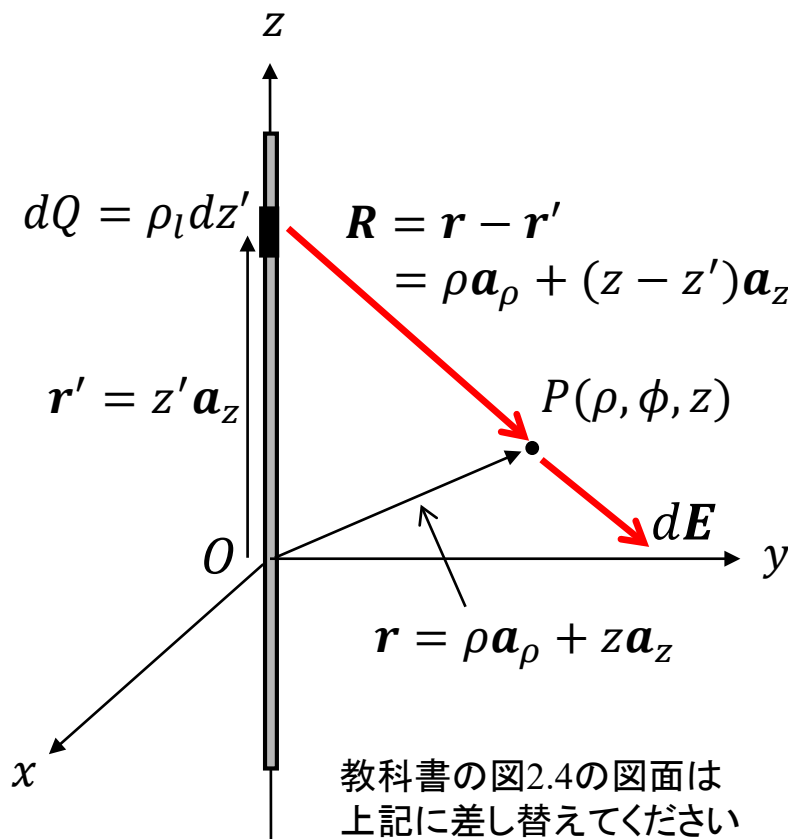
$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$$

これから

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{a}_\rho + (z - z') \mathbf{a}_z}{\{\rho^2 + (z - z')^2\}^{3/2}}$$

上式を $-\infty < z' < \infty$ の範囲で積分する。

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{a}_\rho + (z - z') \mathbf{a}_z}{\{\rho^2 + (z - z')^2\}^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l dt}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - t \mathbf{a}_z}{(t^2 + \rho^2)^{3/2}}$$



$(z - z') = -t$ と置換

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \frac{\rho_l \rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\rho - \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t dt}{(t^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z \\
 &= \frac{\rho_l \rho}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_l \rho}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{t}{\rho^2 \sqrt{t^2 + \rho^2}} \right]_0^{\infty} \mathbf{a}_\rho \\
 &= \frac{\rho_l \rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho^2} \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho
 \end{aligned}$$

被積分関数の偶奇性

積分公式(C.1) $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$

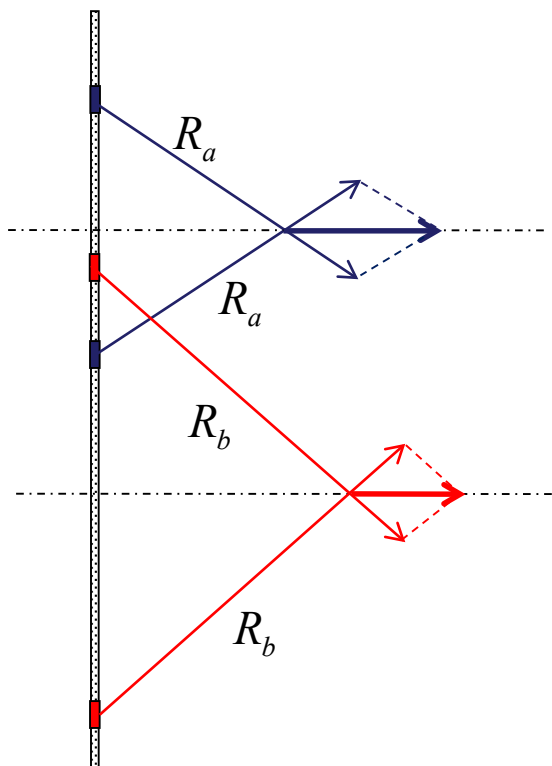
〔確認〕 $x = a \tan \theta$ と置換すると, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta}$ より $dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} &= \int \frac{a / \cos^2 \theta d\theta}{(a^2 / \cos^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{a^2} \sin \theta = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}
 \end{aligned}$$

例題2.1において ρ 成分のみが残る理由

※ $z = 0$ の場合の電界

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l \rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(z'^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\rho - \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boxed{z'} dz'}{(z'^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$



観測点から直線に下ろした垂線の足から等距離にある二つの線素による電界を合成すると z 成分が打ち消し合う。これらの線素による電界の総和について、同様に z 成分が生じず、結局 ρ 成分のみが残ることになる。

《例題2.2》 xy 面全体に電荷が一様に分布している。面電荷密度を ρ_s とするとき、電界を計算せよ。

【解答1：面素分割による方法】 xy 平面上の面素 dS' に含まれる電荷は

$$dQ = \rho_s dS' = \rho_s dx' dy'$$

である。対称性から、 $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$ と選ぶと

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -x'\mathbf{a}_x - y'\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$$

これから

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\rho_s dx' dy'}{4\pi\epsilon_0} \frac{-x'\mathbf{a}_x - y'\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

上式を $-\infty < x' < \infty$, $-\infty < y' < \infty$ の範囲で積分する。

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_s dx' dy'}{4\pi\epsilon_0} \frac{-x'\mathbf{a}_x - y'\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_s dx' dy'}{4\pi\epsilon_0} \frac{-x'\mathbf{a}_x - y'\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\rho_s z}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx' dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z
 \end{aligned}$$

被積分関数の
偶奇性

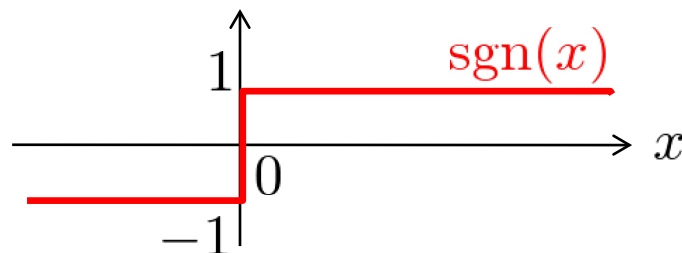
極座標変換 $x' = \rho' \cos \phi'$, $y' = \rho' \sin \phi'$ を行うと

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \frac{\rho_s z}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} d\phi' \int_0^{\infty} \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z \\
 &= \frac{\rho_s z}{\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \right]_0^{\infty} \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z
 \end{aligned}$$

ρ' に関する積分は
次のスライド参照

を得る。ここで, $\text{sgn}(x)$ は符号関数であり, 次のように定義される。

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$



2重積分の極座標変換 (p.32 過去のQ&Aから A2.5参照)

*2重積分の変数変換の一般公式(微積分の教科書を参照のこと)

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_D f(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

*極座標変換 $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$ に対するヤコビアン

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cos \phi) & \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \cos \phi) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin \phi) & \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \sin \phi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{vmatrix} = \rho$$

*2重積分の極座標変換公式

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi$$

公式として覚える必要はなく、面素(の大きさ)に相当する部分を変更すればよい。

積分公式(C.2)
$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

〔確認〕 $x = a \tan \theta$ と置換すると, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta}$ より $dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} &= \int \frac{(a \tan \theta)(a / \cos^2 \theta) d\theta}{(a^2 / \cos^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{a} \int \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{a} \cos \theta = -\frac{1}{a} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned}$$

《例題2.2》 xy 面全体に電荷が一様に分布している。面電荷密度を ρ_s とするとき、電界を計算せよ。

【解答2: 直線電流分割による方法】 観測点を $r = z\mathbf{a}_z$ とおく。 xy 平面を y 方向に幅 dy' の短冊 ($\rightarrow$ 直線状の線電荷) に分割する。この短冊の線電荷密度は $\rho_l = \rho_s dy'$ である。短冊から観測点におろした垂線ベクトルと垂線の長さは

$$\mathbf{L} = \overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} = z\mathbf{a}_z - y'\mathbf{a}_y$$

$$L = |\mathbf{L}| = \sqrt{z^2 + y'^2}$$

と与えられる。この短冊の電荷による電界は

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{L}}{L^2} = \frac{\rho_s dy'}{2\pi\epsilon_0} \frac{z\mathbf{a}_z - y'\mathbf{a}_y}{z^2 + y'^2}$$

となる。上式を $-\infty < y' < \infty$ の範囲で積分する。

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_s dy'}{2\pi\epsilon_0} \frac{z\mathbf{a}_z - y'\mathbf{a}_y}{z^2 + y'^2}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \frac{\rho_s z}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{y'^2 + z^2} \mathbf{a}_z - \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y' dy'}{y'^2 + z^2} \mathbf{a}_y \\
 &= \frac{\rho_s z}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dy'}{y'^2 + z^2} \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s z}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z} \tan^{-1} \frac{y'}{z} \right]_0^{\infty} \mathbf{a}_z \\
 &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z
 \end{aligned}$$

被積分関数の偶奇性

積分公式(C.3) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$

〔確認〕 $x = a \tan \theta$ と置換すると, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta}$ より $dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$

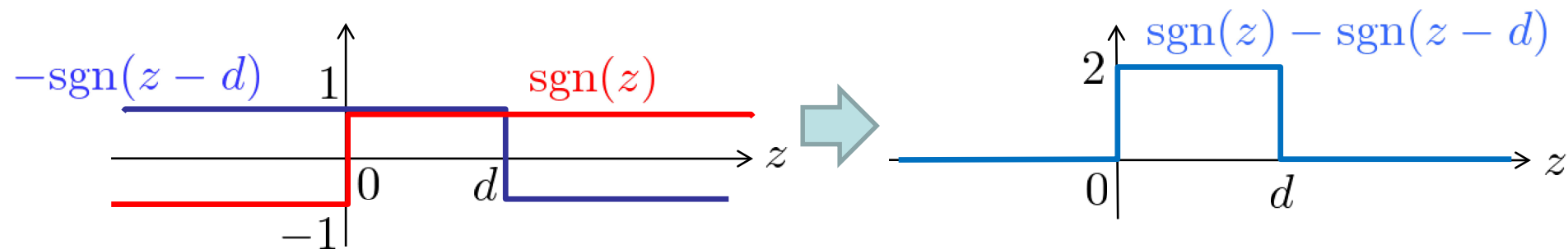
$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \int \frac{a / \cos^2 \theta d\theta}{a^2 / \cos^2 \theta} = \frac{1}{a} \int d\theta \\
 &= \frac{1}{a} \theta = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}
 \end{aligned}$$

《例題2.3》平面 $z = 0$ に面電荷密度 ρ_s で一様に電荷が分布し、
平面 $z = d$ ($d > 0$) に面電荷密度 $-\rho_s$ で一様に電荷が分布して
いる。これらの電荷分布による電界を決定せよ。

【解答】

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z + \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z - d) \mathbf{a}_z \\ &= \begin{cases} \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \mathbf{a}_z & \text{for } 0 < z < d \\ \mathbf{0} & \text{for } z < 0 \text{ or } z > d \end{cases} \end{aligned}$$

※ この結果は、平行平板コンデンサの
極板間に生じる電界に対応する。



章末問題【4】

半径 a の円周上に、線電荷密度 ρ_l の一様な線電荷が分布している。

(1) 円周の中心軸上における電界を計算せよ。

ポイント: プライムなしとプライムありの座標系は別物であると区別すること!

【解答】

(1) 円周上の $r' = a\mathbf{a}_{\rho'}$ の点における線素 $dl' = ad\phi'$ に含まれる電荷は

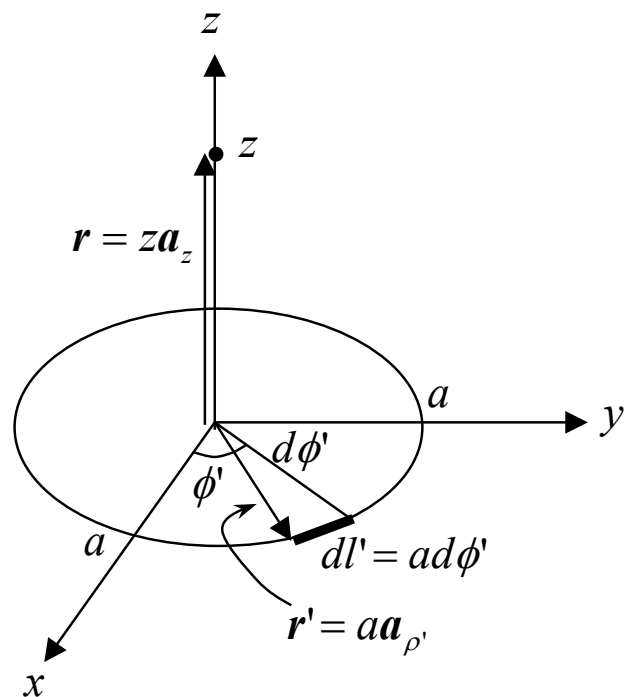
$$dQ = \rho_l dl' = \rho_l a d\phi'$$

と与えられる。

$r = z\mathbf{a}_z$ の点において円周上の線素 dl' による電界は, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_{\rho'}$,
 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{z^2 + a^2}$ であるから

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\rho_l a d\phi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_{\rho'}}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

となる。



この微小電界を $\phi = 0 \rightarrow 2\pi$ で積分することで, 円周上に一様に分布する線電荷による電界が与えられる。

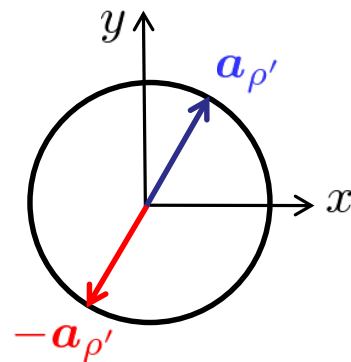
$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \int_0^{2\pi} \frac{\rho_l a d\phi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_{\rho'}}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \\
 &= \left(\frac{\rho_l z a}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \right) \mathbf{a}_z - \frac{\rho_l a^2}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_{\rho'} d\phi'
 \end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{a}_{\rho'} = \cos \phi' \mathbf{a}_x + \sin \phi' \mathbf{a}_y$ より

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_{\rho'} d\phi' &= \int_0^{2\pi} (\cos \phi' \mathbf{a}_x + \sin \phi' \mathbf{a}_y) d\phi' \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \right) \mathbf{a}_x + \left(\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' \right) \mathbf{a}_y = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\rho_l z a}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} 2\pi \right) \mathbf{a}_z = \frac{\rho_l}{2\epsilon_0} \frac{z a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$



$$\mathbf{a}_{\rho'} - \mathbf{a}_{\rho'} = \mathbf{0}$$

3 章 ガウスの法則

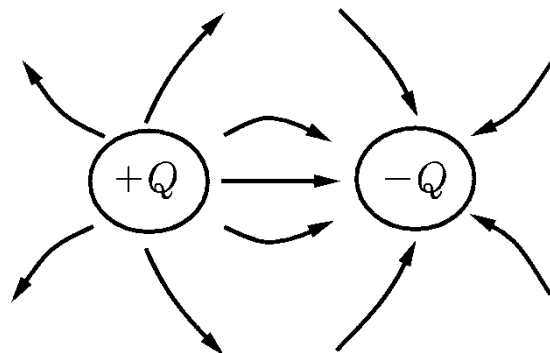
- 3.1 電束
- 3.2 ガウスの法則
- 3.3 ガウスの法則の適用
- 3.4 発散とガウスの発散定理
 - 3.4.1 発散
 - 3.4.2 ガウスの発散定理



ガウス (1777-1855)

3.1 電束

(1) 電気力線：電界 E に接する曲線群 ($E \parallel d\mathbf{r}$)

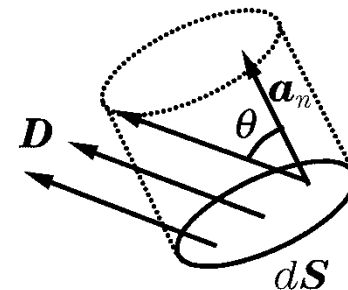


(2) 電束 Ψ : 正の電荷から負の電荷への流れの流量

(2') 電束密度 D : 大きさが単位面積当りの流量、
向きが流れの向きを表すベクトル

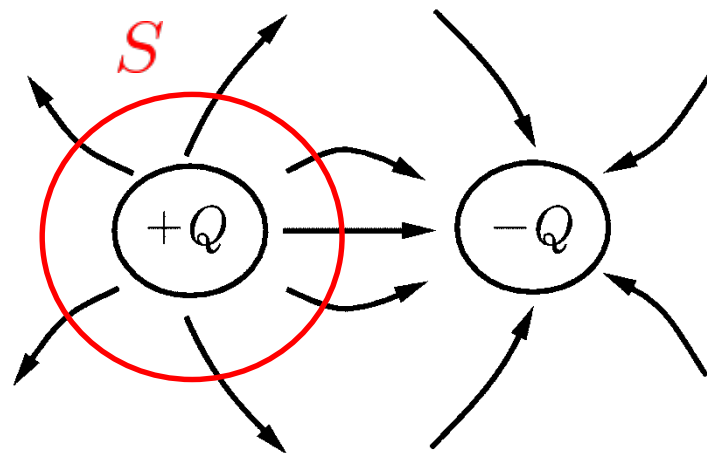
$$\begin{aligned} d\Psi &= \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} & (3.1) \\ &= |\mathbf{D}| |d\mathbf{S}| \cos \theta = (D \cos \theta) dS \end{aligned}$$

$$\Psi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.2)$$



※電束は与えられた曲面 S を
通過する電荷の総量を表す

$$Q = \Psi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$



(3) 電界 E と電束密度 D の間の関係

原点に点電荷 Q を置いたときの電界 E と電束密度 D を比較

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad (3.3)$$

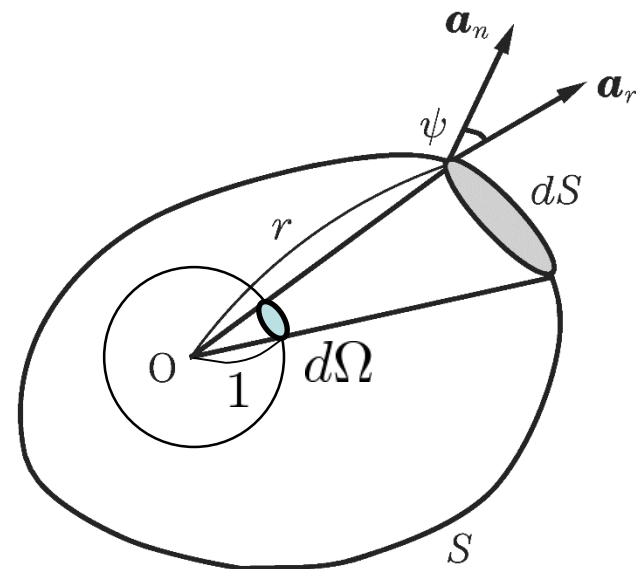
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (3.4)$$

3.2 ガウスの法則

(1) 立体角

ある点から曲面 S を見込むとき、その点と曲面 S 上の任意の点を結ぶ線分が、その点を中心とする単位球面と交わる面積

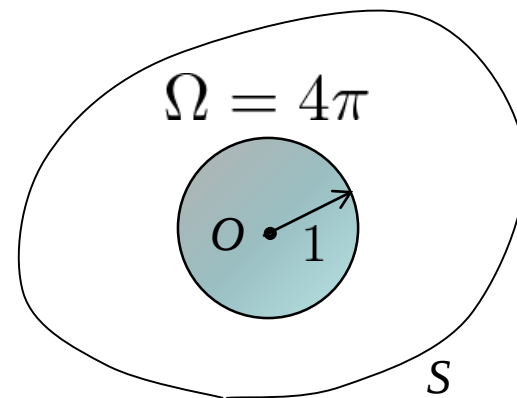
※単位球面：半径1の球面



(1') 全立体角

ある点が閉曲面で覆われるとき、その点から閉曲面を見込む立体角は単位球面の面積 4π となる。

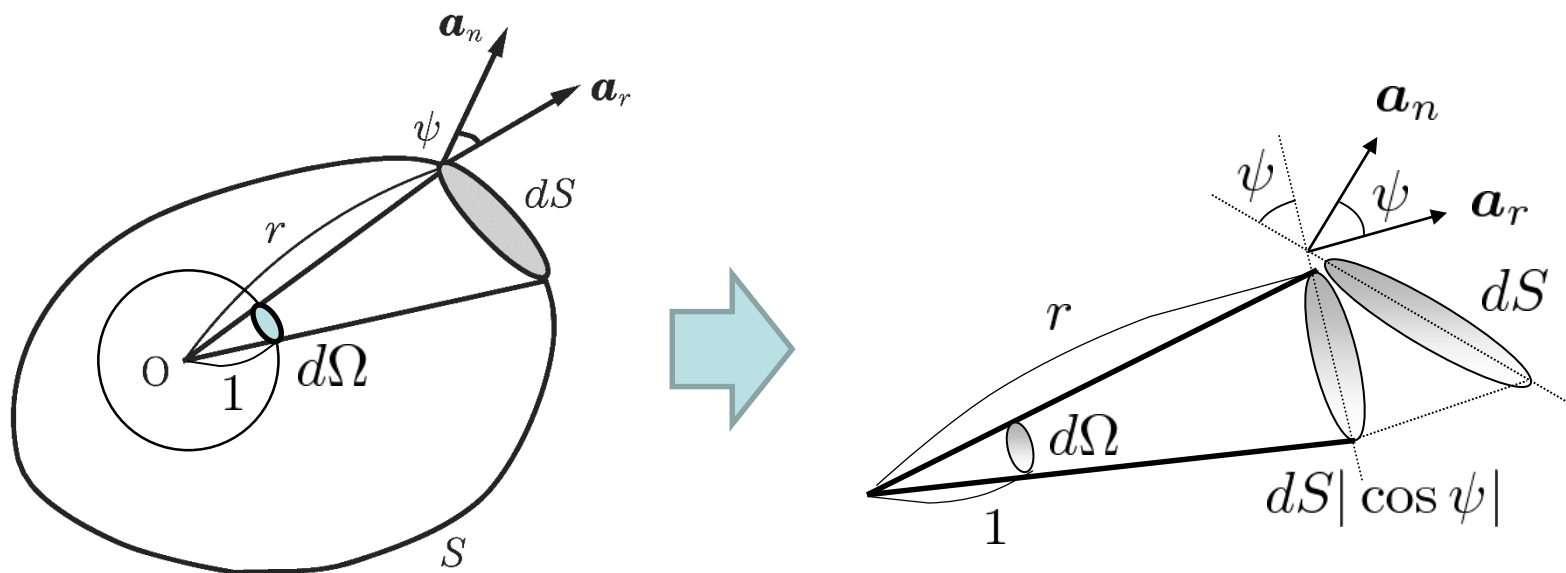
$$\iint_{\Omega} d\Omega = 4\pi$$



(1'') 面素 dS を見込む立体角 $d\Omega$

$$r^2 d\Omega = dS |\cos \psi| = \pm dS \cos \psi = \pm \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{S} \quad (3.5)$$

※ 複号 $\pm$ は、 ψ が鋭角のとき正号 $+$ とし、 ψ が鈍角のとき負号 $-$ とする。



(2) ガウスの法則の導出

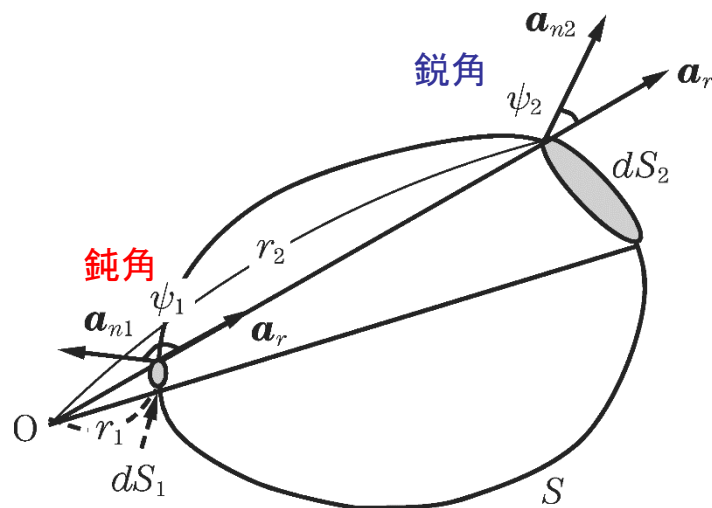
(2-a) 閉曲面 S の内部に点電荷が存在する場合

$$\Psi = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi} \underbrace{\iint_{\Omega} d\Omega}_{4\pi} = Q \quad (3.6)$$

※ 積分記号の○は面積分を行う領域が閉曲面であることを示す。

(2-b) 閉曲面 S の外部に点電荷が存在する場合

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 \\ &= \frac{Q}{4\pi r_1^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{S}_1 + \frac{Q}{4\pi r_2^2} \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{S}_2 \\ &= \frac{Q}{4\pi r_1^2} (-r_1^2 d\Omega) + \frac{Q}{4\pi r_2^2} (r_2^2 d\Omega) \\ &= 0 \quad (3.7) \end{aligned}$$



(2-b)閉曲面 S の外部に点電荷が存在する場合(続き)

$$\Psi = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.8)$$

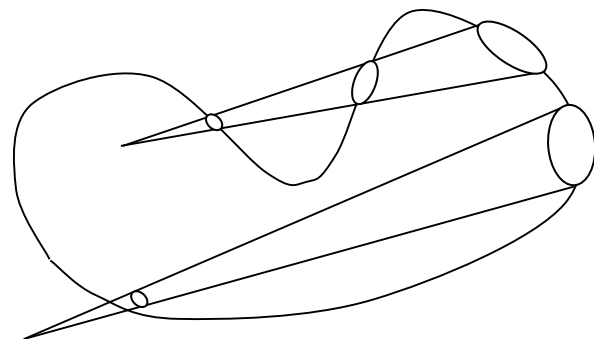
(2-a)と(2-b)のまとめ

閉曲面の内部に点電荷が存在するとき、電束 Ψ はその電荷量に一致し、閉曲面の内部に点電荷が存在しないとき、電束 Ψ は0となる。

上記の結果は、形状が屈曲するなどの複雑な閉曲面に対しても成り立つ。

【教科書の補足】

右図のような複雑な形をした閉曲面の場合、立体角を考える際の微小錐は閉曲面と多数回交わる。点電荷(微小錐の頂点)が閉曲面の内部にあれば、奇数回交わる。この場合、偶数回の交わりは(2-b)と同じ議論により、面積分の寄与は打ち消し合うので、残った一回の交わりに関する寄与のみを考慮すればよい。他方、点電荷が閉曲面の外部にあれば、微小錐は閉曲面と偶数回交わることになり、面積分は0となる。



(2-c) 点電荷が複数個ある場合，電荷が連続的に分布する場合
重ね合わせの原理から

ガウスの法則

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \underbrace{Q_{\text{enclosed by } S}}_{\text{閉曲面 } S \text{ に囲まれた電荷の総量}} \quad (3.9)$$

閉曲面 S に囲まれた電荷の総量

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_v \rho_v dv \quad (3.10)$$

電荷分布に応じて, $\sum_i Q_i$, $\int_C \rho_l dl$, $\iint_S \rho_s dS$, $\iiint_v \rho_v dv$
を使い分けること.

3.3 ガウスの法則の適用

(1) 適用の原則:

面積分が簡単になる閉曲面を選択する

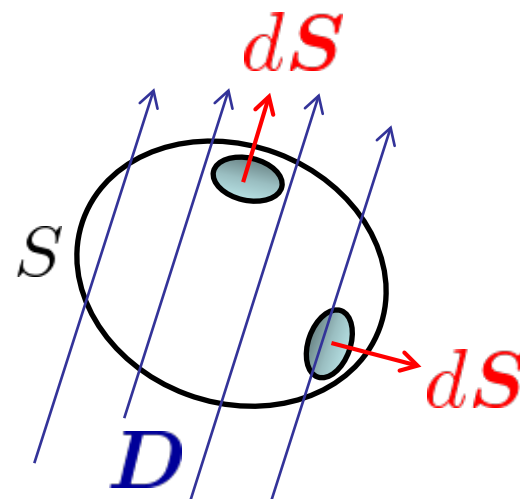
1) 電束密度 D が面素 dS に対して平行もしくは垂直である。

1-a) $D \parallel dS$ のとき

$$\begin{aligned}
 D \cdot dS &= D \cdot (a_n dS) \\
 &= (D \cdot a_n) dS \\
 &= D_n dS
 \end{aligned}$$

1-b) $D \perp dS$ のとき

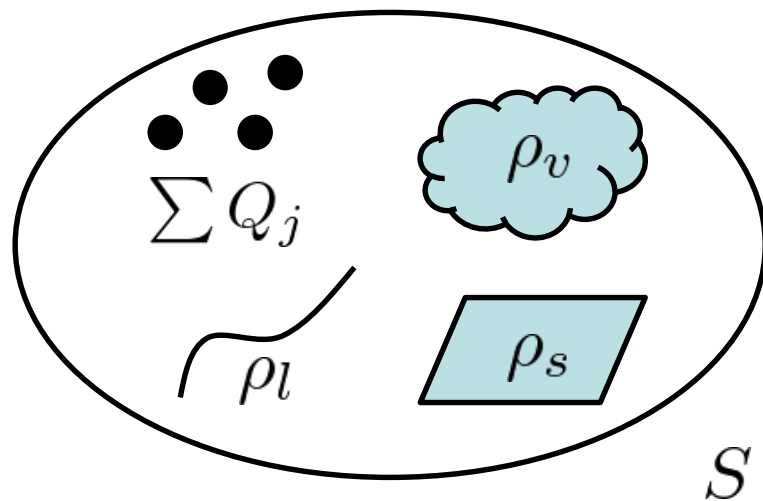
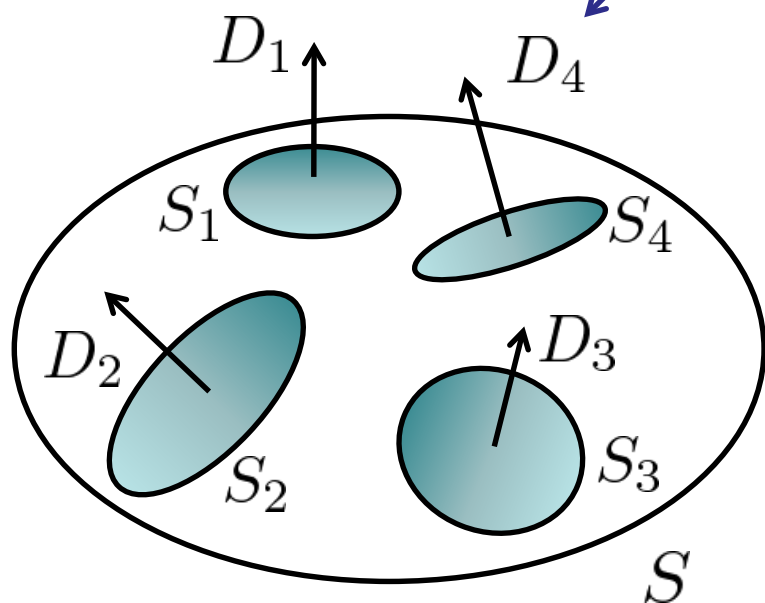
$$D \cdot dS = 0$$



2) 電束密度 D に垂直な閉曲面の部分をも S_i とするとき、各 S_i において D_n が一定値 D_i となる。

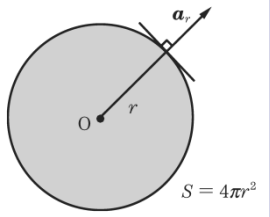
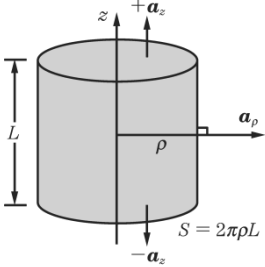
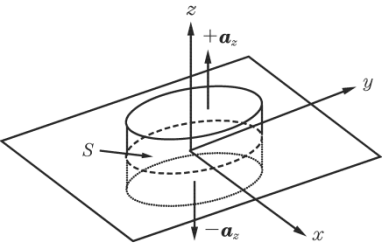
式(3.9)の面積分の簡単化

$$\begin{aligned}
 \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \sum_{i=1}^m \iint_{S_i} D_n dS = \sum_{i=1}^m D_i \iint_{S_i} dS \\
 &= \sum_{i=1}^m D_i \times (\text{Area of } S_i) = \underline{Q_{\text{enclosed by } S}} \quad (3.11)
 \end{aligned}$$



(2) 解法のパターン

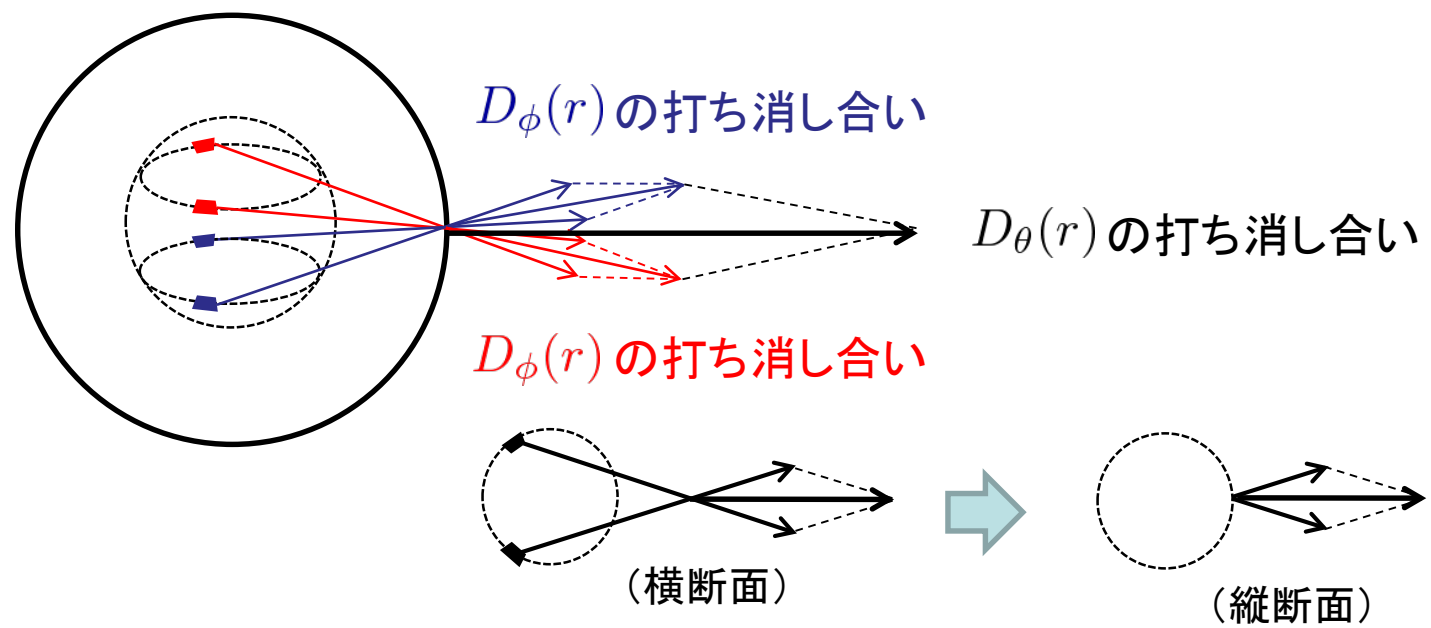
電荷分布の対称性に着目する

電荷分布	選択すべき閉曲面	垂直な面	簡単化されたガウスの法則	図
球対称	球面	球面	$D_r \cdot 4\pi r^2 = Q_{\text{enclosed by } S}$	
軸対称	円筒面	側面	$D_\rho \cdot 2\pi \rho L = Q_{\text{enclosed by } S}$	
面对称	円筒面	上下の底面	$D_z \cdot 2A = Q_{\text{enclosed by } S}$	

(a) 電荷分布が球対称である場合

→球座標系 (r, θ, ϕ) に対して, 電荷分布は θ, ϕ の関数でない。
すなわち, 電荷分布は r のみの関数である。

→ $D = D_r(r)a_r + D_\theta(r)a_\theta + D_\phi(r)a_\phi$



$$D = D_r(r)a_r$$

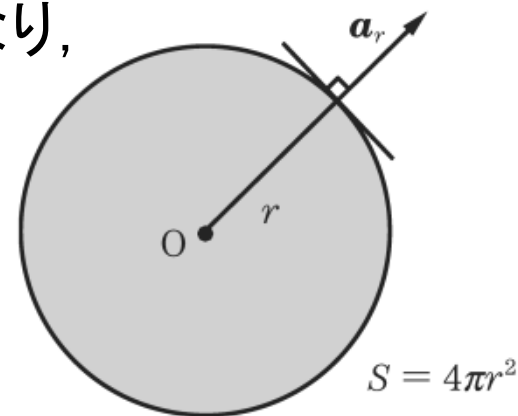
閉曲面 S として, 原点が中心で, 半径 r の球面を選ぶ.

↑ ガウスの法則を適用する際は、必ず閉曲面をどう選んだかを記述する必要がある。

※この閉曲面 S の法単位ベクトル $\mathbf{a}_n$ は $\mathbf{a}_r$ となり,
電束密度 $\mathbf{D} = D_r(r)\mathbf{a}_r$ と平行である。

以上から, 式(3.11)より

$$D_r \cdot 4\pi r^2 = Q_{\text{enclosed by } S} \quad (3.12)$$



あるいは

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho_v(r') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' \right) \mathbf{a}_r \\ &= \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r \rho_v(r') r'^2 dr' \right) \mathbf{a}_r \end{aligned} \quad (3.13)$$

球座標系(プライムあり)の体積素

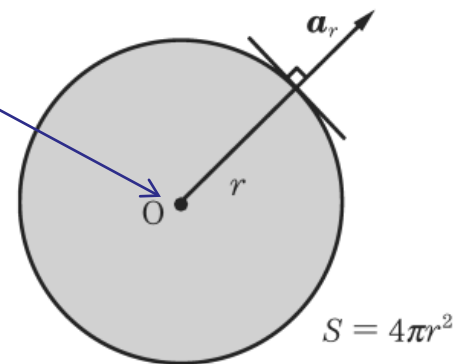
《例題3.1》原点に位置する点電荷 Q による電束密度 D を求めよ。

【解答】 閉曲面 S として、原点が中心で、半径 r の球面を選ぶ。
 簡単化されたガウスの法則(3.12)より

$$D_r \cdot 4\pi r^2 = Q_{\text{enclosed by } S} = Q$$

すなわち

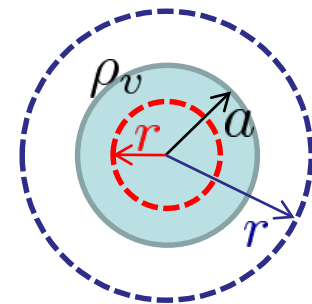
$$\mathbf{D} = D_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$



章末問題【5】改 半径 a の球形領域に体積電荷密度 ρ_v で一様に電荷が分布するとき、電束密度を求めよ。

【解法のポイント】

ガウスの法則を適用する際、電荷分布の有無により、 $Q_{\text{enclosed by } S}$ に対して場合分けが必要になる場合がほとんどである。



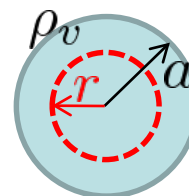
【解答】閉曲面 S として、原点が中心で、半径 r の球面を選ぶ。このとき、 $Q_{\text{enclosed by } S}$ が $r = a$ を境に異なることに注意して、場合分けを行う。

a) $r < a$ のとき：閉曲面 S 内部に「体積電荷密度 ρ_v で一様に帯電した半径 a の球形領域」のうち、半径 r の球形領域の部分が含まれる。簡単化されたガウスの法則(3.12)より

$$D_r \cdot 4\pi r^2 = Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

すなわち

$$\mathbf{D} = D_r \mathbf{a}_r = \frac{\rho_v r}{3} \mathbf{a}_r$$



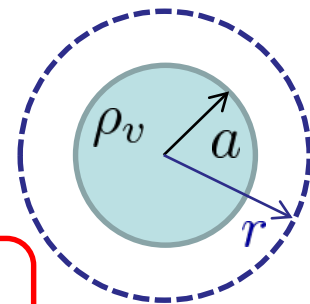
b) $r > a$ のとき：閉曲面 S 内部に「体積電荷密度 ρ_v で一様に帯電した半径 a の球形領域」すべてが含まれる。簡単化されたガウスの法則(3.12)より

$$D_r \cdot 4\pi r^2 = Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$$

すなわち

$$\mathbf{D} = D_r \mathbf{a}_r = \frac{\rho_v a^3}{3r^2} \mathbf{a}_r$$

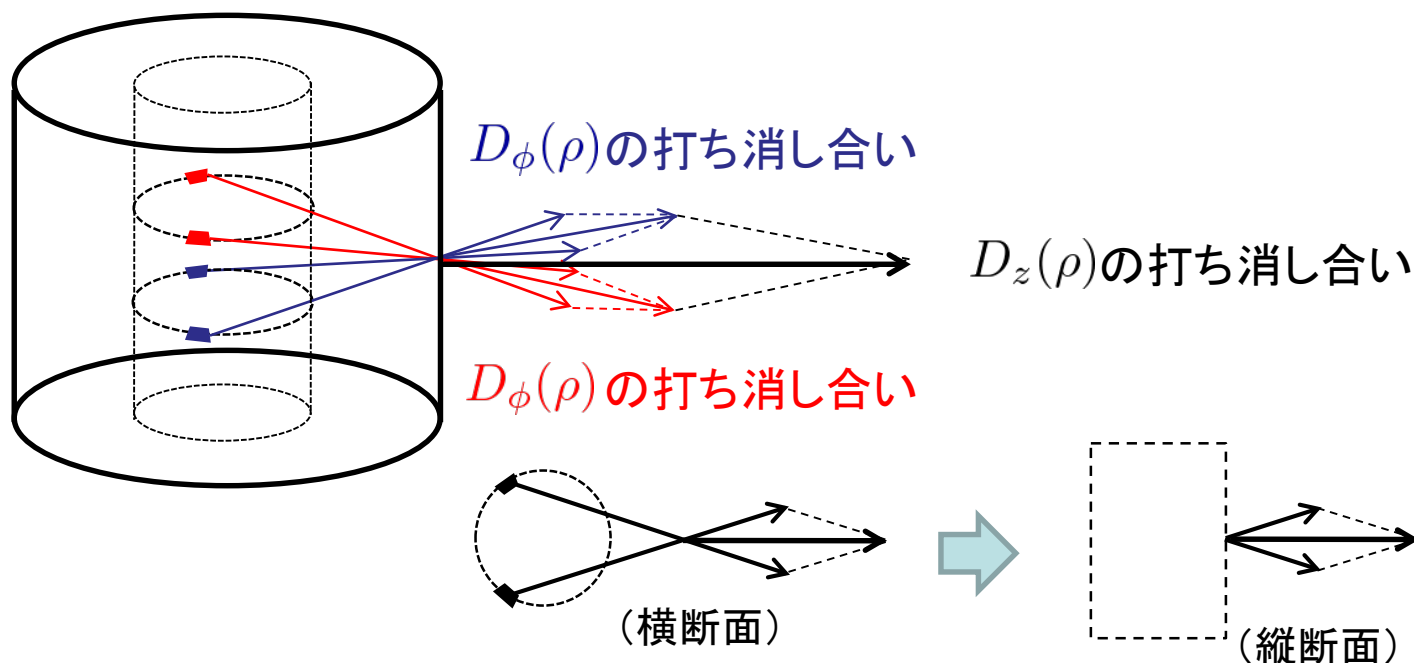
場合分けする場合は、
各場合での図面も必要！！



(b) 電荷分布が軸対称である場合

→円筒座標系 (ρ, ϕ, z) に対して, 電荷分布は ϕ, z の関数でない。
すなわち, 電荷分布は ρ のみの関数である。

$$\rightarrow D = D_\rho(\rho)\mathbf{a}_\rho + D_\phi(\rho)\mathbf{a}_\phi + D_z(\rho)\mathbf{a}_z$$



$$D = D_\rho(\rho)\mathbf{a}_\rho$$

閉曲面 S として, 中心軸が z 軸上にあり, 半径 ρ , 長さ L の円筒面を選ぶ。

※上下の底面の法単位ベクトルはそれぞれ $\pm \mathbf{a}_z$ であり, $\mathbf{a}_\rho$ と直交している。底面はガウスの法則の面積分に寄与しない。一方, 側面の法単位ベクトルは $\mathbf{a}_\rho$ であり, 電束密度 $\mathbf{D} = D_\rho(\rho)\mathbf{a}_\rho$ と平行である。

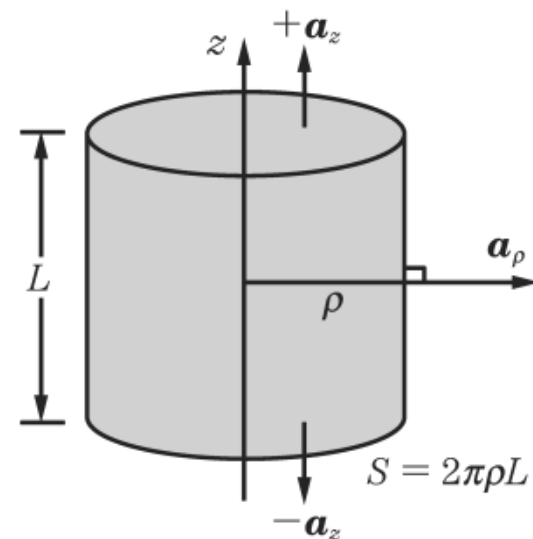
以上から, 式(3.11)より

$$D_\rho \cdot 2\pi\rho L = Q_{\text{enclosed by } S} \quad (3.14)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2\pi\rho L} \mathbf{a}_\rho \\ &= \frac{1}{2\pi\rho L} \left(\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \rho_v(\rho') \rho' d\rho' d\phi' dz' \right) \mathbf{a}_\rho \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho_v(\rho') \rho' d\rho' \right) \mathbf{a}_\rho \end{aligned} \quad (3.15)$$

円筒座標系(プライムあり)の体積素



《例題3.2》 z 軸に沿って無限長の一様線電荷が分布するときの電束密度 D を求めよ。ただし、線電荷密度を ρ_l とする。

【解答】閉曲面 S として、長さ L の円筒面を選ぶ。
底面は、 xy 平面に平行で、中心が z 軸上にあり、半径 ρ である円とする。

閉曲面の設定について記載すること！

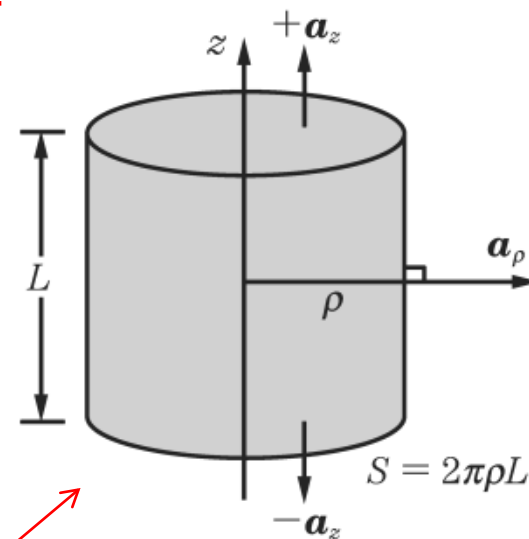
どの法則を使った書くこと！

簡単化されたガウスの法則(3.14)より

$$D_\rho \cdot 2\pi\rho L = Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_l L$$

すなわち

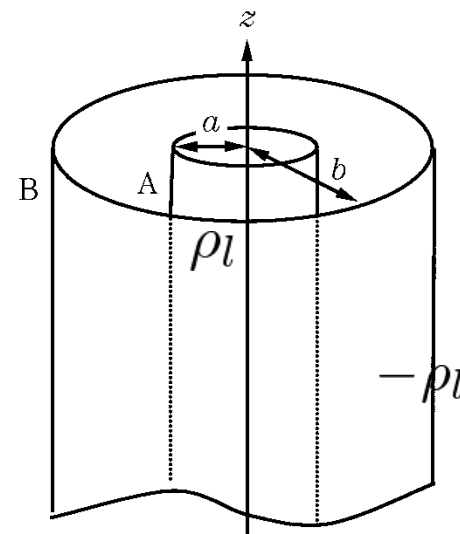
$$D = D_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho$$



間違い防止のためにも、
公式を書くこと！

図面は必ず描くこと！
省略してはならない！
(場合分けする場合は、
各場合での図面も必要！！)

《例題3.3》半径 a の内導体Aと半径 b の外導体Bの無限長同軸円筒導体を考える。内導体Aの外側表面に線電荷密度 ρ_l ，外導体Bの内側表面に線電荷密度 $-\rho_l$ の一様な面電荷を与える。電束密度 D を求めよ。



【解答】閉曲面 S として，長さ L の円筒面を選ぶ。
底面は， xy 平面に平行で，中心が z 軸上にあり，半径 ρ である円とする。

【解法のポイント】

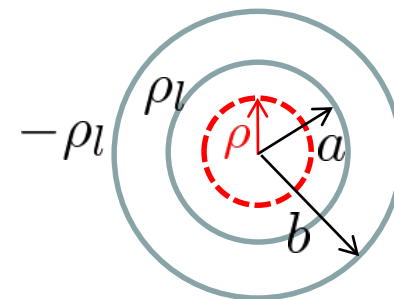
閉曲面 S に含まれる電荷 $Q_{\text{enclosed by } S}$ は，閉曲面 S の選び方によって変化することがほとんどである。とにかく設定した閉曲面 S の含まれる電荷すべての和を考えること。

a) $\rho < a$ のとき，簡単化されたガウスの法則(3.14)より

$$D_\rho \cdot 2\pi\rho L = Q_{\text{enclosed by } S} = 0$$

すなわち

$$D = D_\rho a_\rho = 0$$



- b) $a < \rho < b$ のとき, 閉曲面 S に含まれる電荷は
 内導体Aの外側表面の面電荷のみである。
 簡単化されたガウスの法則(3.14)より

$$D_\rho \cdot 2\pi\rho L = Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_l L$$

すなわち

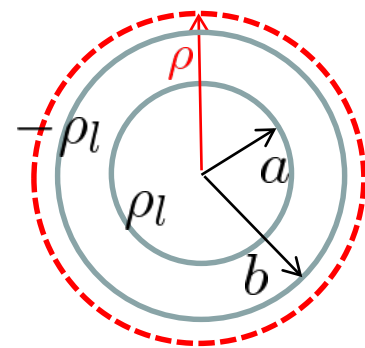
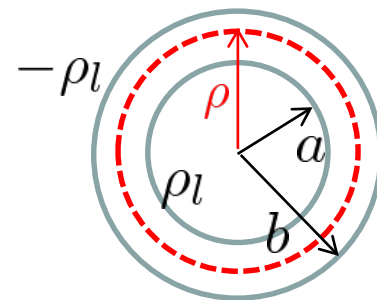
$$\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho$$

- c) $\rho > b$ のとき, 閉曲面 S に含まれる電荷は, 内導体Aの
 外部表面の電荷と外導体Bの内側表面の電荷の総和
 である。簡単化されたガウスの法則(3.14)より

$$\begin{aligned} D_\rho \cdot 2\pi\rho L &= Q_{\text{enclosed by } S} \\ &= \rho_l \cdot L + (-\rho_l) \cdot L = 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho = \mathbf{0}$$

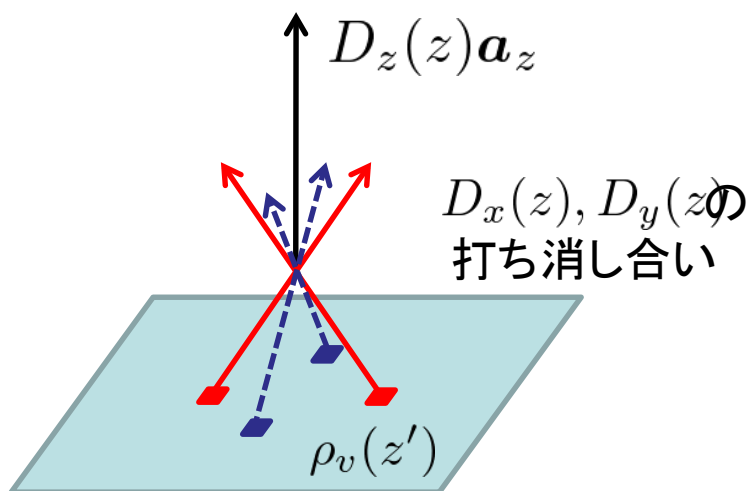


場合分けする場合は,
 各場合での図面も必要！！

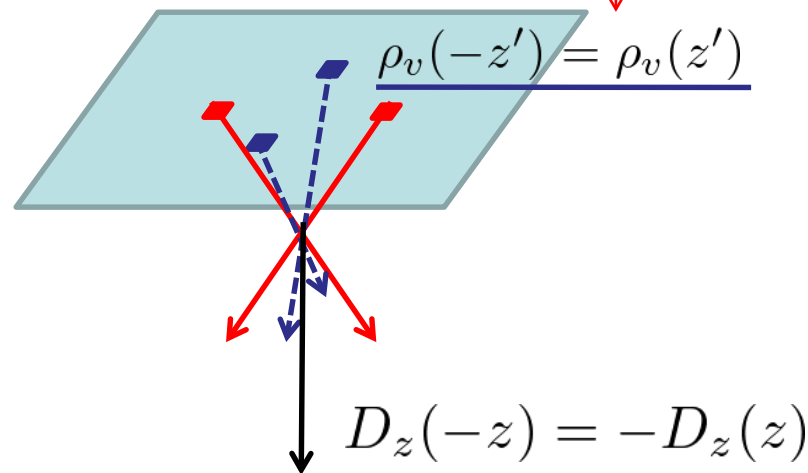
(c) 電荷分布が面対称である場合 (xy 平面に面対称)

→ 直角座標系 (x, y, z) に対して, 電荷分布は x, y の関数でない。
すなわち, 電荷分布は z に関する偶関数である。

$$\rightarrow \mathbf{D} = D_x(z)\mathbf{a}_x + D_y(z)\mathbf{a}_y + D_z(z)\mathbf{a}_z$$

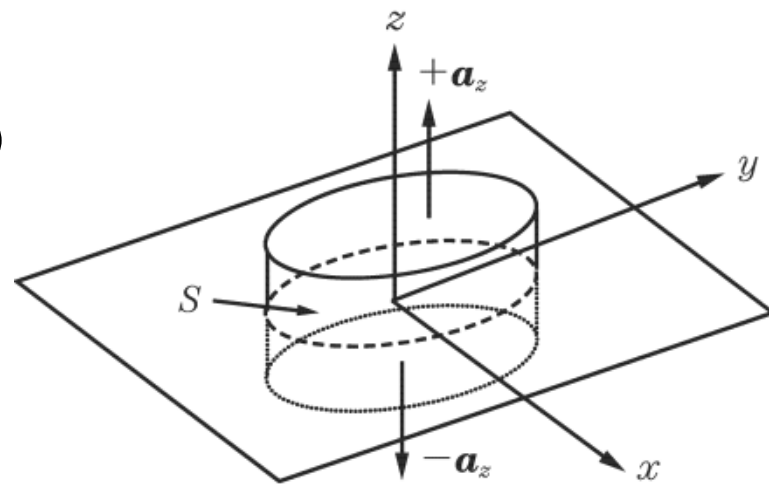


$$\mathbf{D} = D_z(z)\mathbf{a}_z$$



閉曲面 S として、上面と下面が xy 平面の両側に同じ距離 $|z|$ だけ離れた円筒面を選ぶ。ただし、上面と下面の面積を A とする。

※円筒面の側面の法単位ベクトルは $\mathbf{a}_z$ と直交するため、側面はガウスの法則(3.9)の面積分に寄与しない。一方、上面および下面の法単位ベクトルはそれぞれ $\mathbf{a}_z$ および $-\mathbf{a}_z$ であり、電束密度 $\mathbf{D}$ と平行である。



以上から、式(3.11)より

$$D_z(z)A + \{-D_z(-z)\}A = D_z(z) \cdot 2A = Q_{\text{enclosed by } S} \quad (3.16)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2A} \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z && \begin{array}{l} \text{電荷分布の対称性} \\ \rho_v(-z') = \rho_v(z') \end{array} \\ &= \frac{1}{2A} \left(\iint_A \int_{-|z|}^{|z|} \rho_v(z') dS' dz' \right) \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z = \left(\int_{+0}^{|z|} \rho_v(z') dz' \right) \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (3.17)$$

《例題3.4》 xy 平面に一様に面電荷が分布するときの電束密度 D を求めよ。ただし，面電荷密度を ρ_s とする。

【解答】

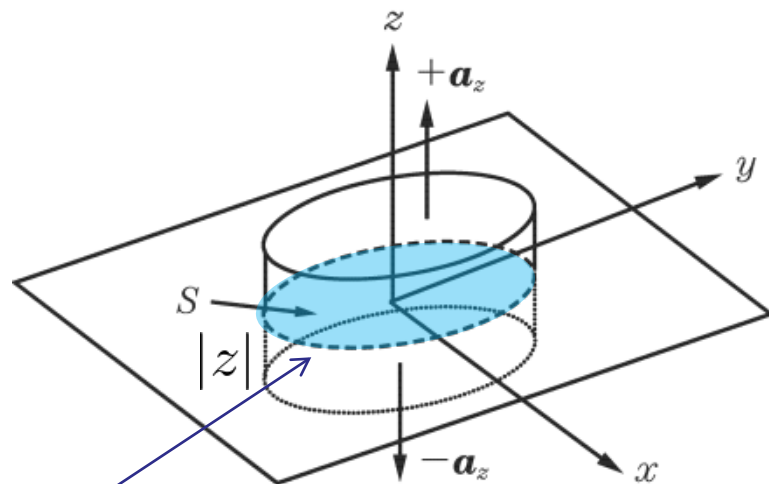
閉曲面 S として，上面と下面が xy 平面の両側に同じ距離 $|z|$ だけ離れた円筒面を選ぶ。ただし，上面と下面の面積を A とする。

簡略化されたガウスの法則(3.16)より

$$D_z(z) \cdot 2A = Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_s A$$

すなわち

$$D = D_z(z) \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{2} \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z$$



章末問題【8】改 $z = -d$ の平面と $z = d$ の平面の間に体積電荷密度 ρ_v の電荷が一様に分布するとき、電束密度を求めよ。

【解答】 閉曲面 S として、上面と下面が xy 平面の両側に同じ距離 $|z|$ だけ離れた円筒面を選ぶ。ただし、上面と下面の面積を A とする。

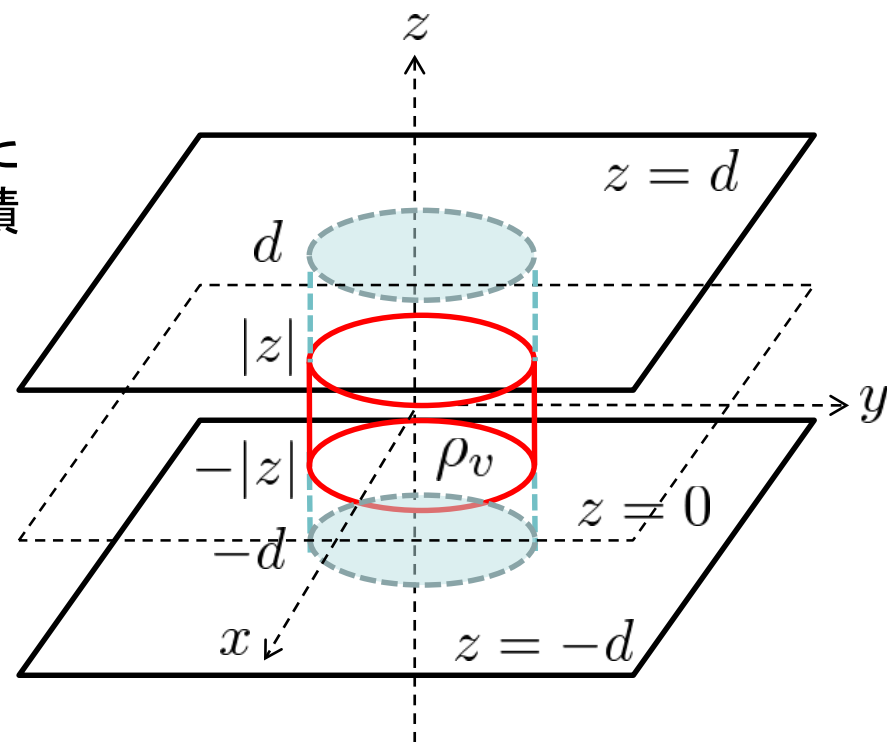
a) $|z| < d$ のとき

簡略化されたガウスの法則(3.16)より

$$\begin{aligned} D_z(z) \cdot 2A &= Q_{\text{enclosed by } S} \\ &= \rho_v (A \cdot 2|z|) \end{aligned}$$

すなわち

$$\mathbf{D} = D_z(z) \mathbf{a}_z = \rho_v |z| \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z = \rho_v z \mathbf{a}_z$$



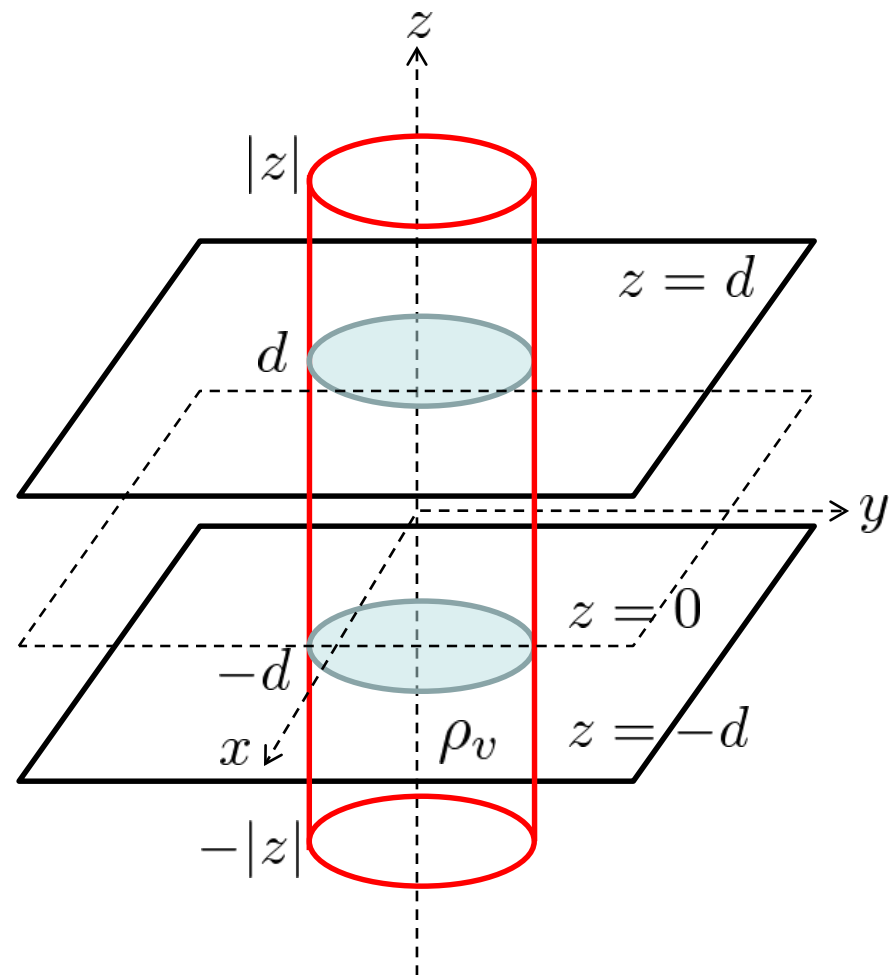
b) $|z| > d$ のとき

簡略化されたガウスの法則(3.16)より

$$\begin{aligned} D_z(z) \cdot 2A &= Q_{\text{enclosed by } S} \\ &= \rho_v (A \cdot 2d) \end{aligned}$$

すなわち

$$\mathbf{D} = D_z(z) \mathbf{a}_z = \rho_v d \operatorname{sgn}(z) \mathbf{a}_z$$



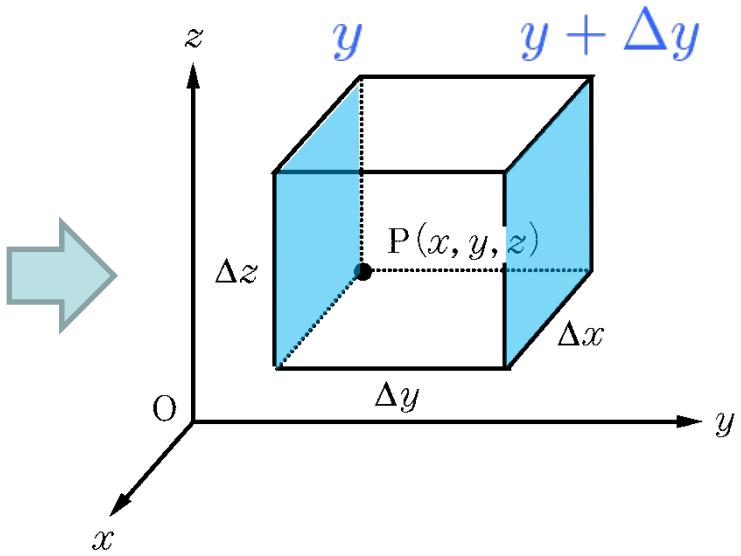
3.4 発散とガウスの発散定理

3.4.1 発散

(1) 微小直方体におけるガウスの法則

直方体表面 ΔS に関する面積分を6面に分割して評価する。

$$\oiint_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_x + \iint_{x+\Delta x} + \iint_y + \iint_{y+\Delta y} + \iint_z + \iint_{z+\Delta z}$$



各面は十分に小さいので、各面において電束密度 $\mathbf{D}$ は定ベクトルとみなせる。つまり、 $\mathbf{D}$ は面積分の外に出せる。例えば

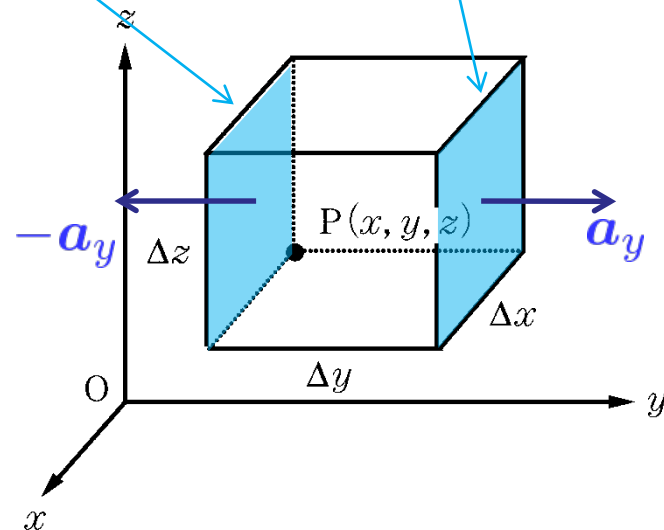
$$\iint_y + \iint_{y+\Delta y} \approx \mathbf{D}(x, y, z) \cdot \iint_y d\mathbf{S} + \mathbf{D}(x, y + \Delta y, z) \cdot \iint_{y+\Delta y} d\mathbf{S}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_y + \iint_{y+\Delta y} &\approx \mathbf{D}(x, y, z) \cdot \iint_y d\mathbf{S} + \mathbf{D}(x, y + \Delta y, z) \cdot \iint_{y+\Delta y} d\mathbf{S} \\
 &= \mathbf{D}(x, y, z) \cdot (-\Delta x \Delta z \mathbf{a}_y) + \mathbf{D}(x, y + \Delta y, z) \cdot (\Delta x \Delta z \mathbf{a}_y) \\
 &= \frac{D_y(x, y + \Delta y, z) - D_y(x, y, z)}{\Delta y} \Delta x \Delta y \Delta z \approx \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta v
 \end{aligned}$$

他の面に関する面積分も同様に

$$\begin{aligned}
 \iint_x + \iint_{x+\Delta x} &\approx \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta v \\
 \iint_z + \iint_{z+\Delta z} &\approx \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta v
 \end{aligned}$$

これから、ガウスの法則(3.9)は次のように近似される。



$$\oiint_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Delta Q \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v \approx \rho_v \Delta v \quad (3.18)$$

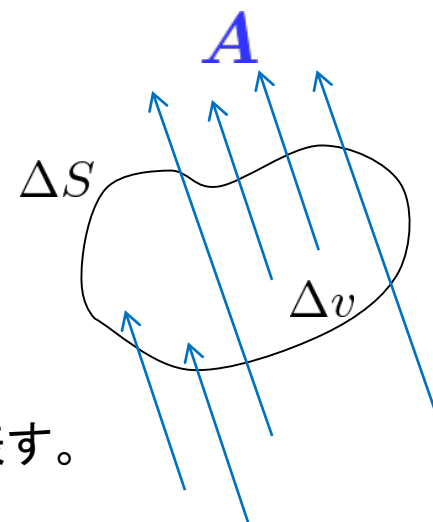
$\Delta v \rightarrow 0$ の極限で

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oiint_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \rho_v \end{aligned} \quad (3.19)$$

(2) 発散 (divergence) の定義

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oiint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.20)$$

ナブラ ドット エイあるいはダイバージェンス エイと読む。



単位体積あたりその閉曲面から流出するベクトル場の流量を表す。

つまり、発散が正であればその点でベクトル場が湧き出ており、

負であればベクトル場が吸い込まれていることになる。

発散が0であるということは、湧き出しも吸い込みもないということである。

川の流れ(湧き水、伏流水など)をイメージするとわかりやすい。

(3) 発散の成分表示

(3-a) 直角座標系

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3.21a)$$

(3-b) 円筒座標系

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3.21b)$$

(3-c) 球座標系

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (3.21c)$$

(4) ガウスの法則の微分形

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_v \quad (3.18)$$



$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (3.22)$$

電束密度 $\mathbf{D}$ の湧出し, 吸込みはその点における体積電荷密度 ρ_v によって決まる。

《例題3.5》原点に位置する点電荷 Q による電束密度 D の発散を求めよ。ただし、原点は除外する。

【解答】 $r \neq 0$ において、 $D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$ より

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad D_\theta = 0, \quad D_\phi = 0$$

であるから

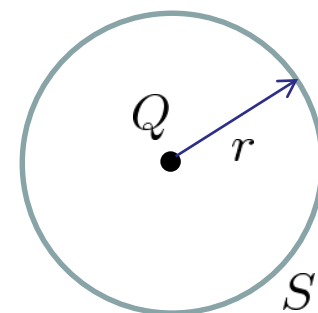
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 D_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{Q}{4\pi r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{Q}{4\pi} \right) = 0 \end{aligned}$$

となる。これから、ガウスの法則の微分形(3.22)より、点電荷の位置を除いて、体積電荷密度 ρ_v は0である。

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (r \neq 0)$$

また、ガウスの法則(3.10)から、点電荷を含む領域で ρ_v の体積分は Q となる。

$$Q = Q_{\text{enclosed by } S} = \iiint_v \rho_v dv$$



3.4.2 ガウスの発散定理

(1) 導出

$$\oint\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enclosed by } S} = \iiint\int_v \rho_v dv = \iiint\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

ガウスの法則

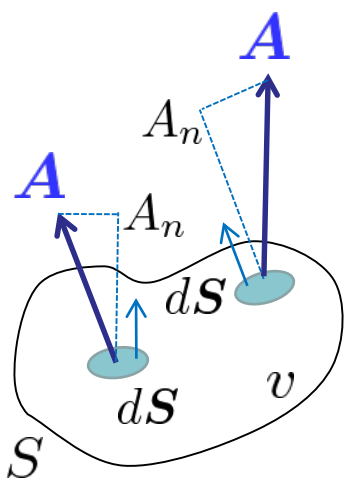
ガウスの法則の微分形

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

ガウスの発散定理(数学定理)

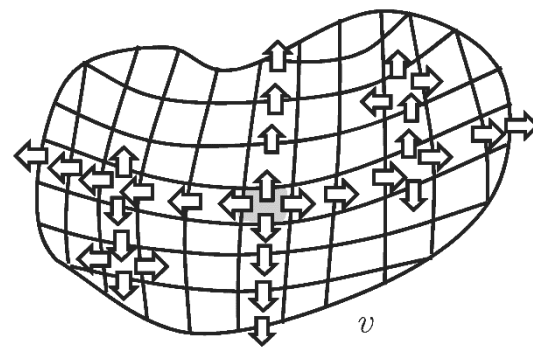
$$\oint\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint\int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv \quad (3.23)$$

閉曲面 S における任意のベクトル場 $\mathbf{A}$ の法線成分に関する面積分が閉曲面 S で囲まれた領域 v におけるベクトル場の発散 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ に関する体積分に等しい



(2) 物理的な意味

閉曲面 S で囲まれた領域 v を考える。領域を大きさの異なる多数のセル(小区画)の領域に分割する。そのうちの一つのセルから出る流量は、隣り合うセルに流入する。したがって、領域 v 全体で総計すると、閉曲面 S を通過する正味の流量を計算したことになる。



《例題3.6》原点を中心とする半径 a の球面を閉曲面 S として、ベクトル場 $\mathbf{A} = f(r)\mathbf{a}_r$ に対してガウスの発散定理(3.23)が成り立つことを確認せよ。

【略解】

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(a) \mathbf{a}_r \cdot (a^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r) \\ &= a^2 f(a) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \underline{4\pi a^2 f(a)} \\ \iiint_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f(r)) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^a \frac{d}{dr} (r^2 f(r)) dr \\ &= 4\pi [r^2 f(r)]_0^a = \underline{4\pi a^2 f(a)} \end{aligned}$$

4 章 電 位

4.1 電荷移動による仕事

4.2 電位差と電位

4.2.1 電位差

4.2.2 電位

4.3 電位の重ね合わせ

4.3.1 点電荷による電位

4.3.2 連続的に分布する電荷による電位

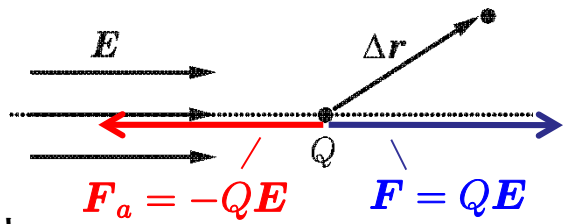
4.4 電位の勾配

4.5 ポアソンの方程式

4.1 電荷移動による仕事

(1) 静電界中で点電荷を移動させるために要する仕事

$$\begin{aligned}\Delta W &= \mathbf{F}_a \cdot \Delta \mathbf{r} \\ &= -Q\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{r}\end{aligned}\tag{4.1}$$

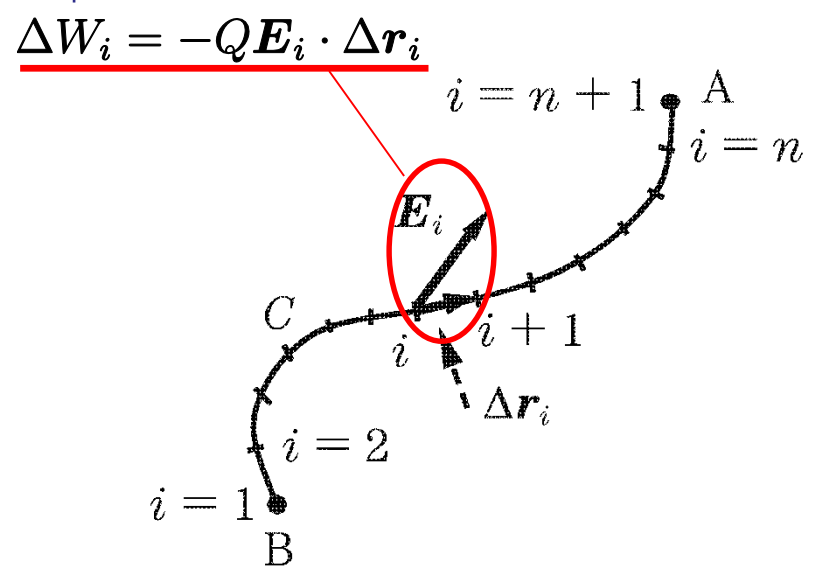


$\Delta W > 0$ ならば電界に逆らって仕事をしたことになり,
 $\Delta W < 0$ ならば電界によって仕事がされたことになる。

(2) 点電荷を曲線に沿って移動させるために要する仕事

$$\begin{aligned}W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta W_i \\ &= -Q \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i \\ &= -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}\tag{4.2}$$

線積分



例題4.1 静電界 $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y$ に対して, 点 $B(2, 0, 0)$ から点 $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ まで点電荷 Q を移動させるのに要する仕事を計算せよ。ただし, 移動経路として次の二通りを考えよ。

(a) 経路 C_1 が $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ の円弧の場合

(b) 経路 C_2 が点 B から点 A への線分の場合

【解答】(a) 経路 C_1 上の点は $\mathbf{r} = 2\mathbf{a}_\rho = 2(\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y), 0 \leq \phi \leq \pi/4$ と与えられる。経路 C_1 上において

$$\mathbf{E} = 2(\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y)$$

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} d\phi = 2(-\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y) d\phi$$

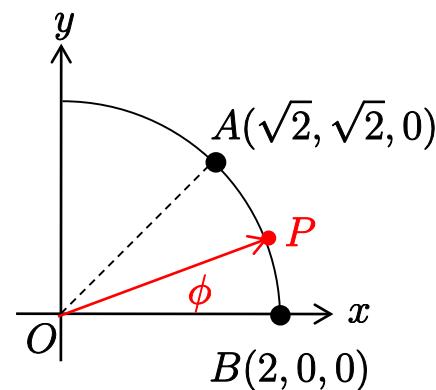
となるから, 式(4.2)から

$$W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= -Q \int_0^{\pi/4} 2(\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y) \cdot 2(-\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y) d\phi$$

$$= -4Q \int_0^{\pi/4} (-\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) d\phi = -4Q \int_0^{\pi/4} \cos 2\phi d\phi = -4Q \left[\frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= -2Q$$

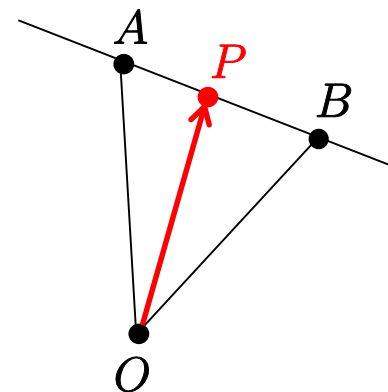


【復習】直線上の点のパラメータ表示

直線 AB を $t:1-t$ に内分する点を P とするとき
すなわち, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ より

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (0 \leq t \leq 1)}$$



(b) 経路 C_2 上の点は

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA} = (1-t)(2\mathbf{a}_x) + t(\sqrt{2}\mathbf{a}_x + \sqrt{2}\mathbf{a}_y) \\ &= \{2 - (2 - \sqrt{2})t\}\mathbf{a}_x + \sqrt{2}t\mathbf{a}_y \quad (0 \leq t \leq 1) \end{aligned}$$

と与えられる。経路 C_2 上において

$$\mathbf{E} = \sqrt{2}t\mathbf{a}_x + \{2 - (2 - \sqrt{2})t\}\mathbf{a}_y$$

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \{-(2 - \sqrt{2})\mathbf{a}_x + \sqrt{2}\mathbf{a}_y\} dt$$

となるから, 式(4.2)より

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -Q \int_0^1 \left(\sqrt{2}t\mathbf{a}_x + \{2 - (2 - \sqrt{2})t\}\mathbf{a}_y \right) \cdot \{-(2 - \sqrt{2})\mathbf{a}_x + \sqrt{2}\mathbf{a}_y\} dt \\ &= -Q \int_0^1 \{-2\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})t + 2\sqrt{2}\} dt = -Q \left[-\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})t^2 + 2\sqrt{2}t \right]_0^1 \\ &= -2Q \quad \longleftarrow \text{(a)の結果と同じ!} \end{aligned}$$

(3) 静電界中における閉曲線に沿った仕事

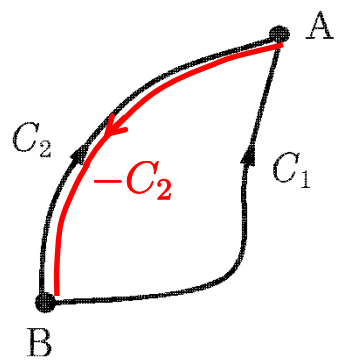
✖ 静電界中において、単位点電荷を点Bから点Aに移動させるために要する仕事は経路によらない。

$$-\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.3)$$

すなわち

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1+(-C_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \underline{0} \end{aligned}$$

○は閉曲線であることを示す。



静電界では、閉曲線Cの選び方に依らず、閉曲線に沿った電界の線積分は常に0となる。このように、静電界は保存場である。

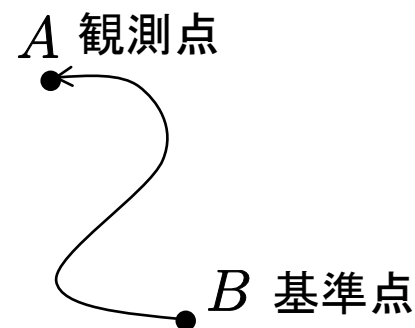
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (4.4)$$

4.2 電位差と電位

4.2.1 電位差

電位差の定義

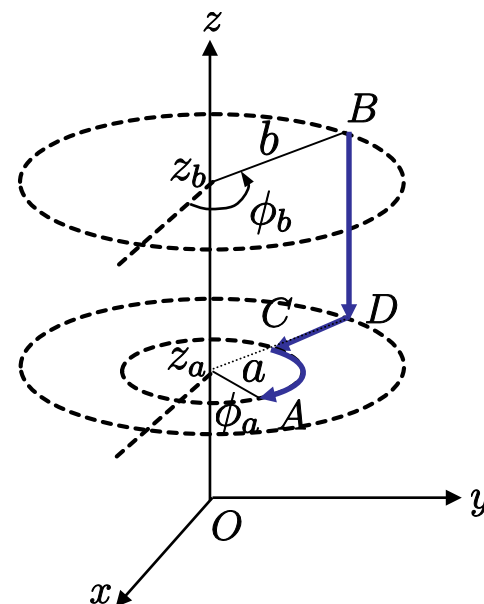
$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.5)$$



例題4.2 z 軸に沿って分布する無限長の一様な線電荷による電界中で,
 $\rho = b$ 面上の点 B から $\rho = a$ 面上の点 A までの間の電位差 V_{AB}
 を求めよ。

【解答】 経路として, 点 $B(\rho = b, \phi = \phi_b, z = z_b)$ から,
 点 $D(\rho = b, \phi = \phi_b, z = z_a)$, 点 $C(\rho = a, \phi = \phi_b, z = z_a)$
 を経由して, 点 $A(\rho = a, \phi = \phi_a, z = z_a)$ に至る経路を
 考える。式(4.5)より

$$\begin{aligned} V_{AB} &= - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_B^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_D^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= V_{DB} + V_{CD} + V_{AC} \end{aligned}$$



式(2.16)より, 線電荷密度を ρ_l とすると, 電界は

$$\mathbf{E} = E_\rho(\rho)\mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho$$

である。

経路 BD 上では, ρ, ϕ は変化しないので, $d\rho = d\phi = 0$ である。これより, $d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z = dz\mathbf{a}_z$ と与えられ

$$V_{DB} = - \int_B^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{z_b}^{z_a} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (dz\mathbf{a}_z) = 0$$

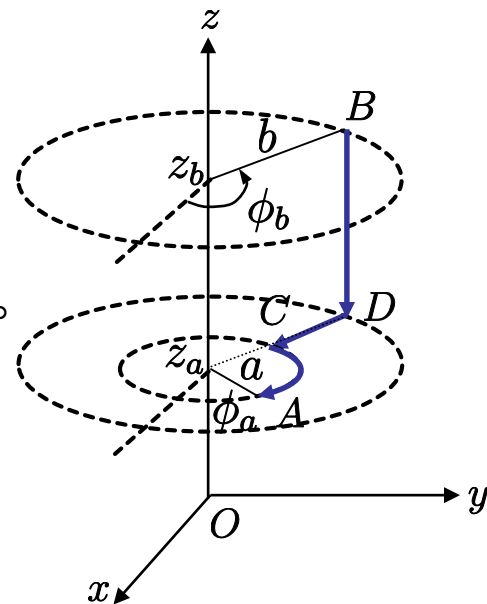
となる。

経路 DC 上では, ϕ, z は変化しないので, $d\phi = dz = 0$ である。これより, $d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z = d\rho\mathbf{a}_\rho$ と与えられ

$$\begin{aligned} V_{CD} &= - \int_D^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^a \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho\mathbf{a}_\rho) = - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} \\ &= - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} [\ln \rho]_b^a = - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} (\ln a - \ln b) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

となる。

※ $\ln$ は底 $e = 2.718\cdots$ をとする自然対数 (natural logarithm) である ($\ln x = \log_e x$)。



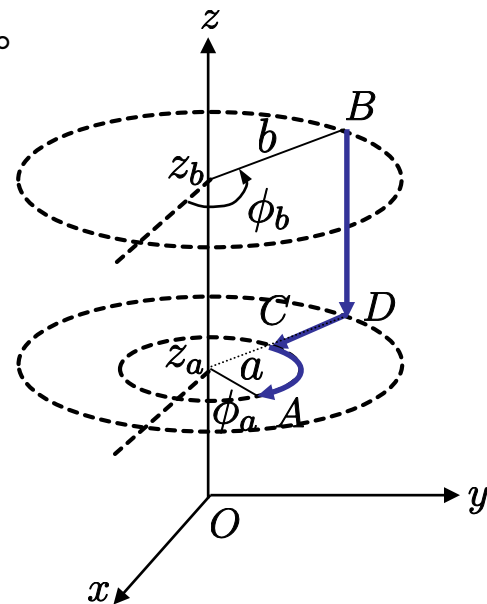
経路 CA 上では, ρ, z は変化しないので, $d\rho = dz = 0$ である。
 これより, $d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z = \rho d\phi\mathbf{a}_\phi$ と与えられ

$$V_{AC} = - \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\phi_b}^{\phi_a} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (\rho d\phi\mathbf{a}_\phi) = 0$$

となる。

以上から

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_{DB} + V_{CD} + V_{AC} = 0 + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} + 0 \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$



【便法】 被積分関数 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ の内積を評価し, 積分変数を予め確定する。

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E_\rho(\rho)\mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z) = E_\rho(\rho)d\rho$$

となり, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ は ρ のみ変化で与えられる。式(4.5)から, 電位差は

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^a E_\rho(\rho)d\rho = - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

となる。

例題4.3 原点に置かれた点電荷 Q による電界中で, $r = b$ 面上の点 B から $r = a$ 面上の点 A までの間の電位差 V_{AB} を求めよ.

【解答】 経路として, 点 $B(r = b, \theta = \theta_b, \phi = \phi_b)$ から, 点 $D(r = b, \theta = \theta_b, \phi = \phi_a)$, 点 $C(r = a, \theta = \theta_b, \phi = \phi_a)$ を経由して, 点 $A(r = a, \theta = \theta_a, \phi = \phi_a)$ に至る経路を考える。式(4.5)より

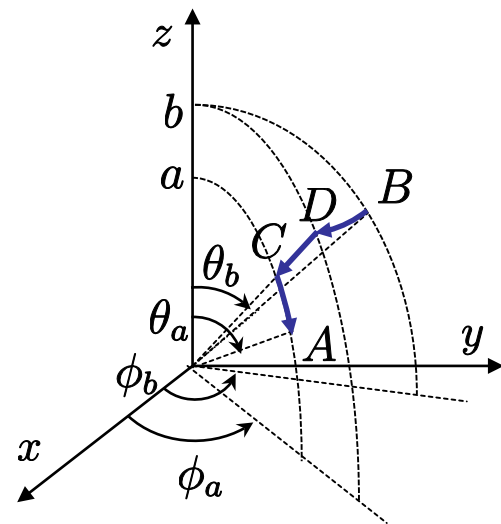
$$\begin{aligned} V_{AB} &= - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_B^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_D^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= V_{DB} + V_{CD} + V_{AC} \end{aligned}$$

電界は $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$ である。

経路 BD 上では, r, θ は変化しないので, $dr = d\theta = 0$ である。
これより, $d\mathbf{r} = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi = r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi$ と与えられ

$$V_{DB} = - \int_B^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\phi_b}^{\phi_a} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi) = 0$$

となる。



経路 DC 上では, θ, ϕ は変化しないので, $d\theta = d\phi = 0$ である。
 これより, $d\mathbf{r} = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi\mathbf{a}_\phi = dr\mathbf{a}_r$ と与えられ

$$\begin{aligned} V_{CD} &= - \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (dr\mathbf{a}_r) \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_b^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

となる。

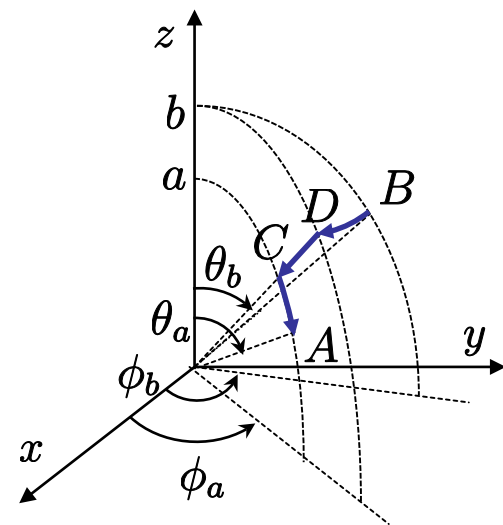
経路 CA 上では, r, ϕ は変化しないので, $dr = d\phi = 0$ である。これより, $d\mathbf{r} = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi\mathbf{a}_\phi = r d\theta\mathbf{a}_\theta$ と与えられ

$$V_{AC} = - \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\theta_b}^{\theta_a} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (r d\theta\mathbf{a}_\theta) = 0$$

となる。

以上から

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_{DB} + V_{CD} + V_{AC} = 0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + 0 \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$



【便法】 被積分関数 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ の内積を評価し, 積分変数を予め確定する。

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E_r(r) \mathbf{a}_r \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) = E_r(r) dr$$

となり, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ は r のみ変化で与えられる。式(4.5)から, 電位差は

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^a E_r(r) dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

となる。

4.2.2 電位

(0) 電位

電位が0となる**電位の基準**を設定し、その基準からの電位差を単に**電位**と呼ぶ。

(1) 電位の基準の例

接地：地面を電位が0となる無限大の平面とみなし、電位の基準を地面とする。

無限遠点：点電荷の電位を扱う場合に無限遠点を電位の基準として選ぶ。

原点に点電荷が置かれた場合の電位 (例題4.3)

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.6)$$

指定された面：同心円筒導体であれば、電位の基準を外導体を選ぶ。

z 軸に一様な線電荷密度 ρ_l が分布する場合の電位 (例題4.2)

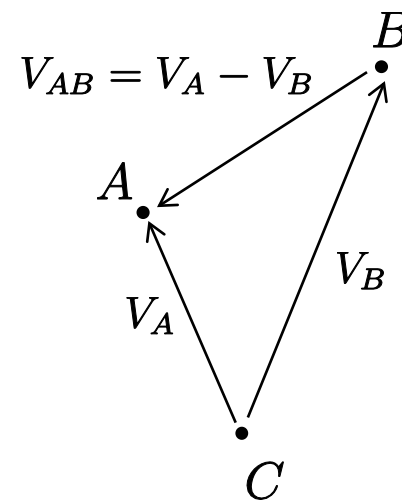
$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho} \quad (4.7)$$

電位の基準面： $\rho = a$

(2) 電位と電位差の関係

点 C を電位の基準とすれば

$$\begin{aligned}
 V_{AB} &= - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \left(\int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right) \\
 &= - \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \left(- \int_C^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right) \\
 &= V_A - V_B
 \end{aligned} \tag{4.8}$$



例1) $r \rightarrow \infty$ を電位の基準とするとき

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} = V_A - V_B$$

例2) $\rho = 1 \text{ m}$ を電位の基準とするとき

$$\begin{aligned}
 V_{AB} &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} (\ln b - \ln a) \\
 &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{a} - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{b} = V_A - V_B
 \end{aligned}$$

(3) 等電位面：電位が等しい点の集合(曲面)

例題4.4 点 $A(0, 0, d)$ に点電荷 Q , 点 $B(0, 0, a^2/d)$ に点電荷 $-(a/d)Q$ を置く。電位が $V = 0$ となるような等電位面の方程式を導け。

【解答】各電荷による電位は重ね合わせられるので(教科書p.58参照), 式(4.6)から, 二つ点電荷による電位は

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} + \frac{(-a/d)Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a^2/d)^2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a^2/d)^2}} \right) \end{aligned}$$

と与えられる。 $V = 0$ となるためには

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a^2/d)^2}} = 0$$

が成り立たなければならない。これを整理して, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ を得る。

(4) 対称的な電荷分布による電位(まとめ)

電荷分布	電界	電位
球対称 $\rho_v(r)$	$\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{a}_r$ $E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho_v(r') r'^2 dr'$	$V = - \int_a^r E_r(r) dr = V_\infty(r) - V_\infty(a)$ $V_\infty(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \int_0^r \rho_v(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho_v(r') r' dr' \right)$ 基準面: $r = a$
軸対称 $\rho_v(\rho)$	$\mathbf{E} = E_\rho(\rho)\mathbf{a}_\rho$ $E_\rho(\rho) = \frac{1}{\epsilon_0 \rho} \int_0^\rho \rho_v(\rho') \rho' d\rho'$	$V = - \int_a^\rho E_\rho(\rho) d\rho = V_l(\rho) - V_l(a)$ $V_l(\rho) = -\frac{1}{\epsilon_0} \left(\ln \rho \int_0^\rho \rho_v(\rho') \rho' d\rho' + \int_\rho^\infty \rho_v(\rho') \rho' \ln \rho' d\rho' \right)$ 基準面: $\rho = a$
面对称 $\rho_v(z) = \rho_v(-z)$	$\mathbf{E} = E_z(z)\mathbf{a}_z$ $E_z(z) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{+0}^{ z } \rho_v(z') dz'$	$V = - \int_a^z E_z(z) dz = V_p(z) - V_p(a)$ $V_p(z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \left(z \int_{+0}^{ z } \rho_v(z') dz' + \int_z^\infty \rho_v(z') z' dz' \right)$ 基準面: $z = a$

4.3 電位の重ね合わせ

4.3.1 点電荷による電位

(1) 点電荷による電位

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.15)$$

(2) 電位に関する重ね合わせの原理

$$\begin{aligned} V &= - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_B^A \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \right) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \left(- \int_B^A \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n V_i = V_1 + V_2 + \cdots + V_n \end{aligned} \quad (4.16)$$

※ 連続的に電荷が分布する場合を含めて、電位に関する重ね合わせの原理が成り立つ。

(3) 複数の点電荷による電位

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (4.17)$$

4.3.2 連続的な電荷分布による電位

(1) 考え方

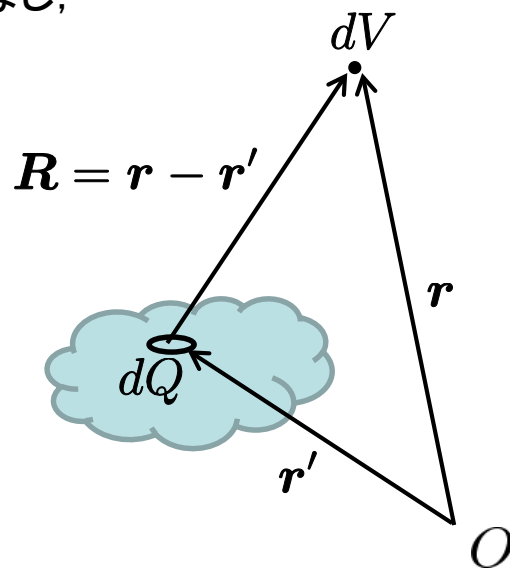
[a] 電荷分布の存在する領域を線素, 面素, 体積素に分割する。

[b] 線素, 面素, 体積素に含まれる電荷 dQ を点電荷とみなし, 微小電位を計算する。

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (4.18)$$

[c] 電荷分布の存在する領域で積分を行う。

$$V = \int dV = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (4.19)$$



電荷の分布形態により, 積分を線積分, 面積分, 体積分とする。

(2) 線電荷分布による電位

$$dQ = \rho_l(\mathbf{r}')dl' \qquad V = \int_C \frac{\rho_l(\mathbf{r}')dl'}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad (4.20)$$

(3) 面電荷分布による電位

$$dQ = \rho_s(\mathbf{r}')dS' \qquad V = \iint_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}')dS'}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad (4.21)$$

(4) 体積電荷分布による電位

$$dQ = \rho_v(\mathbf{r}')dv' \qquad V = \iiint_v \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad (4.22)$$

例題4.5 線電荷密度 ρ_l の一様電荷分布をした長さ $2L$ の直線電荷について、直線電荷の中心から垂直に ρ 離れた位置における電位 V を求めよ。ただし、電位の基準点を無限遠点とする。

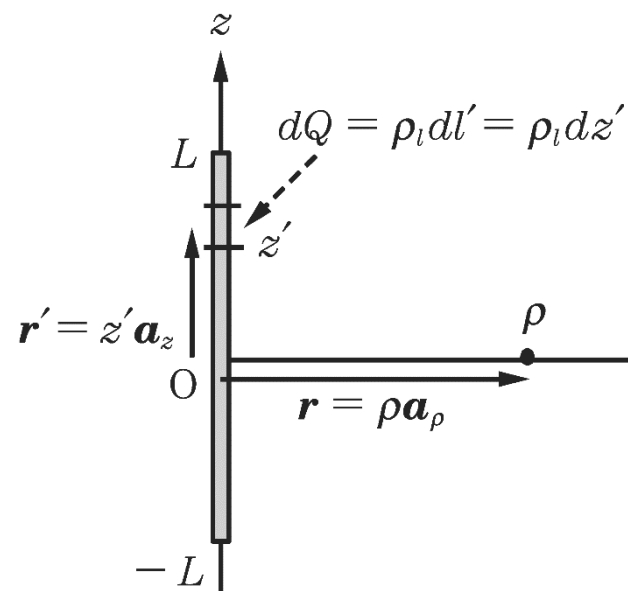
【解答】 z 軸上の $-L \leq z \leq L$ の範囲に電荷が分布していると仮定する。直線上の点 $\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$ における線素は $dl' = dz'$ である。

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z| = \sqrt{\rho^2 + z'^2}$$

であるから、観測点 $\mathbf{r} = \rho\mathbf{a}_\rho$ における電位は、式(4.20)より

$$\begin{aligned} V &= \int_{-L}^L \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + z'^2}} \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(z' + \sqrt{\rho^2 + z'^2} \right) \right]_0^L \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L + \sqrt{\rho^2 + L^2}}{\rho} \right) \end{aligned}$$

被積分関数の偶奇性
積分公式 (C.4)



となる。

〔積分公式(C.4)の確認〕 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)$

$x = a \tan \theta$ と置換すると, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta}$ より $dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a/\cos^2 \theta d\theta}{a/\cos \theta} = \int \frac{d\theta}{\cos \theta} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\cos^2 \theta} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{1 - \sin^2 \theta} \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) d\theta = \frac{1}{2} \{ -\ln |1 - \sin \theta| + \ln |1 + \sin \theta| \} + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} \right| + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt{x^2 + a^2} + x)^2}{(\sqrt{x^2 + a^2})^2 - x^2} \right| + C = \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{a} + C \\
 &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) - \ln a + C = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C'
 \end{aligned}$$

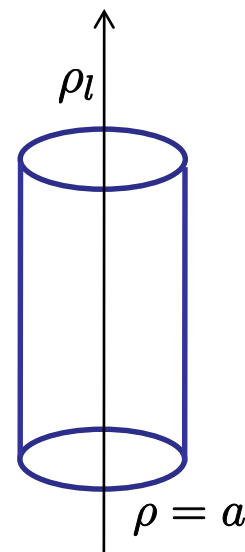
あるいは, $t = x + \sqrt{x^2 + a^2}$ と置換してもよい(微積分の教科書を参照のこと)。

例題4.6 線電荷密度 ρ_l の一様電荷分布をした無限長の直線電荷から垂直に ρ 離れた位置における電位 V を求めよ。ただし、電位の基準面を $\rho = a$ の円筒面とする。

※ 例題4.5において、単純に $L \rightarrow \infty$ としていけない理由は教科書を参照すること。

【解答】 電位の基準を無限遠点とするときの電位を V_∞ と表し、電位の基準面を $\rho = a$ とするときの電位を V と表す。例題4.5の結果から

$$\begin{aligned}
 V &= V_\infty(\rho) - V_\infty(a) \\
 &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L + \sqrt{\rho^2 + L^2}}{\rho} \right) - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L + \sqrt{a^2 + L^2}}{a} \right) \\
 &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \ln \left(\frac{L + \sqrt{\rho^2 + L^2}}{L + \sqrt{a^2 + L^2}} \right) + \ln \frac{a}{\rho} \right\} \\
 &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho}
 \end{aligned}$$



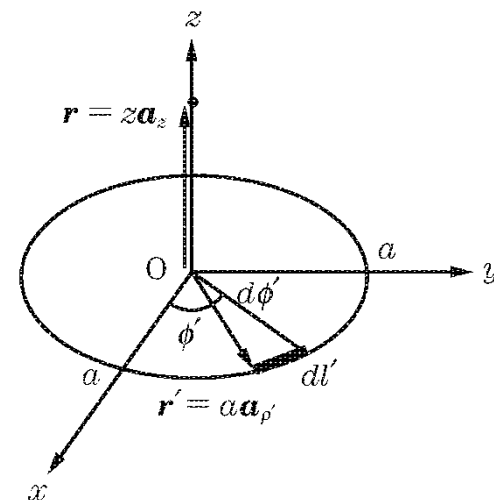
例題4.7 $z = 0$ 面上の $\rho = a$ の円周上に一様に線電荷密度 ρ_l で電荷が分布している。 z 軸上における電位を求めよ。

【解答】円周上の点 $\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_{\rho'}$ における線素は $dl' = ad\phi'$ と与えられる。

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |z\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_{\rho'}| = \sqrt{z^2 + a^2}$$

$\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$ における電位は、式(4.20)より

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \frac{\rho_l a d\phi'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\rho_l a}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \\ &= \frac{\rho_l}{2\epsilon_0} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \end{aligned}$$



【別解】(線積分を利用する方法)

2章の章末問題【4】の結果から、電界は $\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\epsilon_0} \frac{za}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$ と与えられ

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E_z(z) \mathbf{a}_z \cdot (d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z) = E_z(z) dz$$

となり、 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ は z のみ変化で与えられる。式(4.5)から、電位は次のようになる。

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^z E_z(z) dz = - \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0} \int_0^z \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} dz \\ &= - \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0} \left[- \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right]_0^z = \frac{\rho_l}{2\epsilon_0} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \end{aligned}$$

4.4 電位の勾配

(1) 勾配 (gradient)

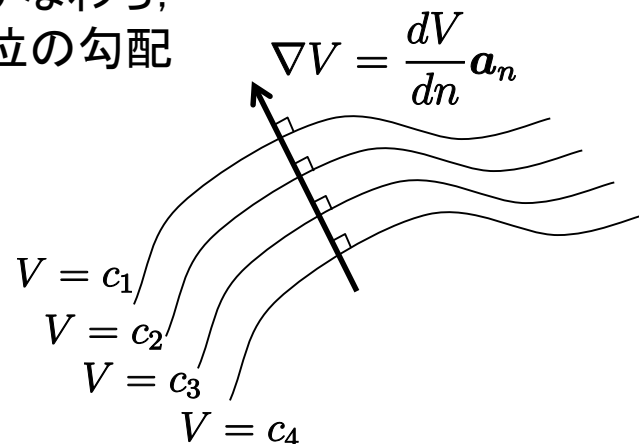
$$\begin{aligned}
 df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\
 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z) \\
 &= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z \right)}_{\nabla f \text{ 勾配}} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

すなわち

$$df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r} \quad (4.24)$$

※ 等電位面上では $dV = 0$ から, $(\nabla V) \cdot d\mathbf{r} = 0$, すなわち, $\nabla V \perp d\mathbf{r}$ が成り立つ。このように, 等電位面と電位の勾配 ∇V は直交する。

勾配 ∇f は, スカラー場 f の最大変化方向とその向きでの変化率(傾き)を表す。



(2) 勾配の成分表示

(a) 直角座標系

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (4.25a)$$

(b) 円筒座標系

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (4.25b)$$

(c) 球座標系

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad (4.25c)$$

(3) 電位と電界の関係

$V = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ から, 微小変位 $d\mathbf{r}$ に対する電位は $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ と与えられる。 $dV = (\nabla V) \cdot d\mathbf{r}$ と比較することで

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \quad (4.27)$$

例題4.8 xy 平面に一様に分布する面電荷密度 ρ_s の電荷による電位は

$$V = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}|z| \quad (z \neq 0)$$

と与えられる。この電位の勾配を計算し、電界を導け。

【解答】 $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{d}{dz} \left(-\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}|z| \right) \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} (|z|) \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z$

例題4.9 z 軸に一様に分布する線電荷密度 ρ_l の電荷による電位の勾配を計算し、電界を導け。

【解答】 $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho} \right) \mathbf{a}_\rho = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{d\rho} (\ln a - \ln \rho) \mathbf{a}_\rho$
 $= -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(0 - \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho$

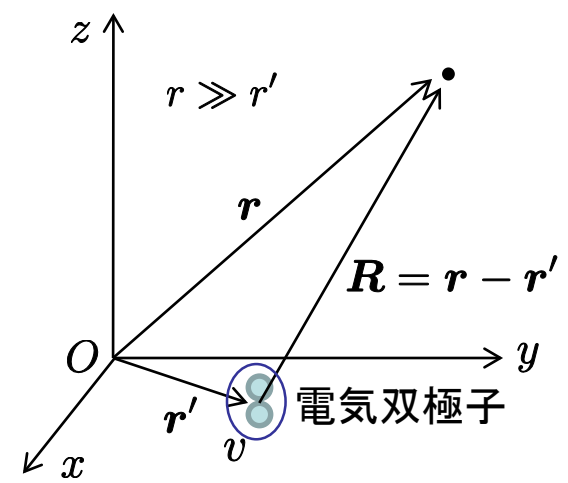
例題4.10 原点に置かれた点電荷 Q に関する電位の勾配を計算し、電界を導け。

【解答】 $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{d}{dr} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \mathbf{a}_r = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{a}_r$
 $= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$

(4) 電気双極子(electric dipole)

極めて近接した距離で等量反対符号の二つの電荷が存在している状態

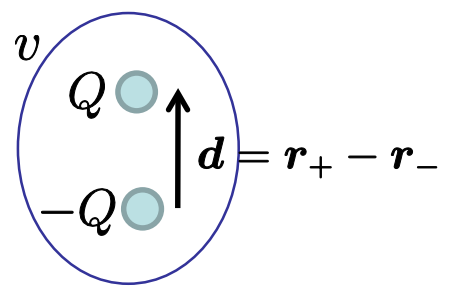
$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2\}^{-1/2} = \{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\}^{-1/2} \\ &= (|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + |\mathbf{r}'|^2)^{-1/2} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right\}^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right\}^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \end{aligned}$$



$(1 + x)^n \approx 1 + nx \quad (|x| \ll 1)$

式(4.22)より

$$\begin{aligned} V &= \iiint_v \frac{\rho_v dv'}{4\pi\epsilon_0 R} \approx \iiint_v \frac{\rho_v dv'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \underbrace{\iiint_v \rho_v dv'}_{Q + (-Q) = 0} + \frac{\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \underbrace{\iiint_v \mathbf{r}' \rho_v dv'}_{\mathbf{p} = Q\mathbf{r}_+ + (-Q)\mathbf{r}_- = Q\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.31) \end{aligned}$$



双極子モーメント

電気双極子による電界

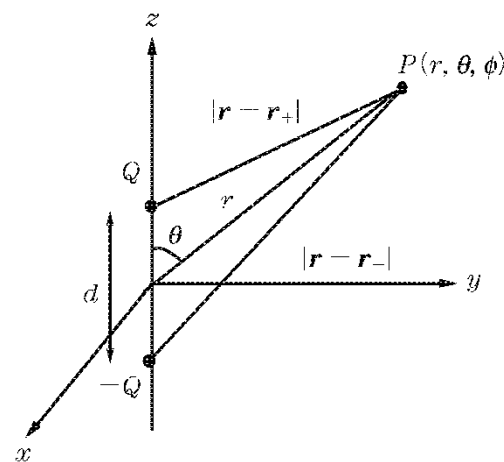
$$\begin{aligned}
 \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\
 \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) &= \mathbf{p} \\
 \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) &= -\frac{3\mathbf{r}}{r^5} \\
 \mathbf{E} = -\nabla V &= -\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \right\} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \frac{-3\mathbf{r}}{r^5} \right\} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r)\mathbf{a}_r - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

例題4.11 点 $(0, 0, d/2)$ に電荷量 Q の点電荷を, 点 $(0, 0, -d/2)$ に電荷量 $-Q$ の点電荷を置く。この電気双極子による電界を求めよ。

【解答】 $\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r$ の位置の電位 V は, $\mathbf{r}_+ = (d/2)\mathbf{a}_z$ の位置の点電荷 Q と $\mathbf{r}_- = -(d/2)\mathbf{a}_z$ の位置の点電荷 $-Q$ の電位の重ね合わせとして

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|}$$

と与えられる。



$\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\pm} = r\mathbf{a}_r \mp (d/2)\mathbf{a}_z$ であるから

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\pm}|^2 &= \{r\mathbf{a}_r \mp (d/2)\mathbf{a}_z\} \cdot \{r\mathbf{a}_r \mp (d/2)\mathbf{a}_z\} \\ &= r^2 \mp r d \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z + d^2/4 = r^2 \mp r d \cos \theta + d^2/4 \end{aligned}$$

となる。さらに、 $d/r \ll 1$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\pm}|} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 \mp \cos \theta \left(\frac{d}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right\}^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{r} \left\{ 1 \mp \cos \theta \left(\frac{d}{r} \right) \right\}^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left\{ 1 \pm \frac{1}{2} \cos \theta \left(\frac{d}{r} \right) \right\} \end{aligned}$$

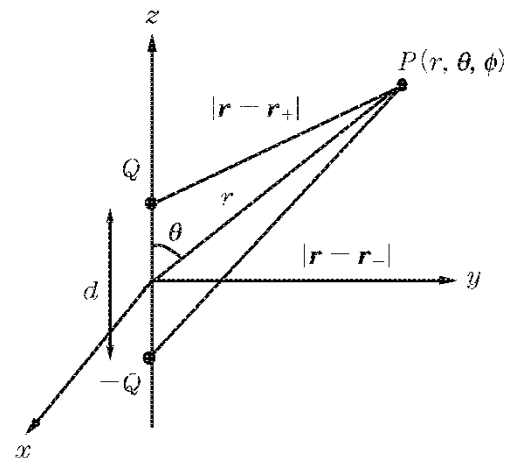
と近似できる。これから

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos \theta \left(\frac{d}{r} \right) \right\} - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cos \theta \left(\frac{d}{r} \right) \right\} \right] = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

が得られる。平面 $z = 0$ ($\theta = \pi/2$) において $V = 0$ となることに注意しよう。

電界 $\mathbf{E}$ は、電位 V が r と θ の関数であることに注意して、式(4.27), (4.25c)より

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta \right) = - \left(-\frac{Qd \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{Qd(-\sin \theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_\theta \right) \\ &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \end{aligned}$$



4.5 ポワソンの方程式

(1) ラプラシアン (Laplacian)

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f \quad (4.34)$$

(2) 各座標系におけるラプラシアン

(2-a) 直角座標系

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (4.35a)$$

(2-b) 円筒座標系

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (4.35b)$$

(2-c) 球座標系

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (4.35c)$$

(3) 電位と体積電荷密度の関係

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \nabla V \\ \downarrow \\ \rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (-\varepsilon_0 \nabla V) = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \nabla V \end{array}$$

(3-a) ポワソンの方程式 (Poisson's equation)

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \quad (4.36)$$

静電界を支配する偏微分方程式であり, 初期条件もしくは境界条件の下で解くことで, 静電界を決定することができる。

※無限遠点を基準とする電位 (ポワソンの方程式の解)

$$V = \iiint_v \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.37)$$

(3-b) ラプラスの方程式 (Laplace's equation)

$$\nabla^2 V = 0 \quad (4.38)$$

例題4.12 原点に置かれた点電荷 Q による電位 $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ が, $r \neq 0$ においてラプラスの方程式を満足することを示せ。

【解答】
$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (-1) = 0\end{aligned}$$

となり, V はラプラスの方程式(4.38)を満足する。



ラプラス (1749-1827)



ポワソン (1781-1840)

5 章 導体・誘電体・静電容量

- 5.1 導体の性質
- 5.2 境界条件：自由空間と導体の境界における電界
- 5.3 電気映像法
- 5.4 誘電体の性質
- 5.5 誘電体内部における電界
- 5.6 境界条件：誘電体境界における電界
- 5.7 静電容量
- 5.8 電氣的蓄積エネルギー
- 5.9 仮想変位と電界の及ぼす力

5.1 導体の性質

(1) 導体: 電気を通す物質 (自由電荷が多数存在する)

絶縁体: 電気を通さない物質 (自由電荷が多数存在しない)

静電界: 自由電荷の移動によって生じる電流が流れなくなった状態,
自由電荷が平衡状態になった状態,
時間的に変化の生じない状態 (静的な状態)

(2) 導体の (みかけの) 電荷

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

導体内には正・負の自由電荷が多数存在しているが、導体の外からみたときの (みかけの) 電荷はこれら正・負の自由電荷の電荷量を差し引きした量である。

(3) 静電誘導

電氣的に中和されている物体に帯電体を近づけたときに、中和されていた物体の帯電体側に帯電体と異符号の電荷が、その反対側に同符号の電荷が誘導される現象

誘導電荷: 静電誘導により誘導される電荷

(4) 導体内部および表面において電界は存在しない

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (\text{導体内部}) \quad (5.1)$$

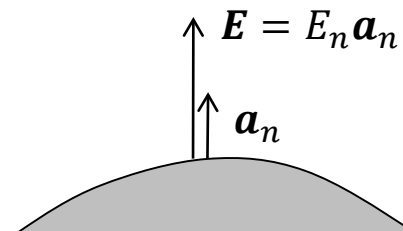
$$\mathbf{E}_t = \mathbf{0} \quad (\text{導体表面}) \quad (5.2)$$

(理由) もし電界が存在すれば, 導体内の自由電荷が移動することになるが, これは静電界の制限(時間的に変化しないこと)に反する。

(5) 導体表面において電界は法線方向を向く

$$\mathbf{E} = E_n \mathbf{a}_n \quad (5.3)$$

$\mathbf{a}_n$: 導体表面における法単位ベクトル



(6) 導体内部では電荷は存在しない

(理由) ガウスの法則から, 導体内に設定した任意の閉曲面の内部に含まれる電荷は必ず 0 とならなければならない。
(詳細は教科書p.74参照)

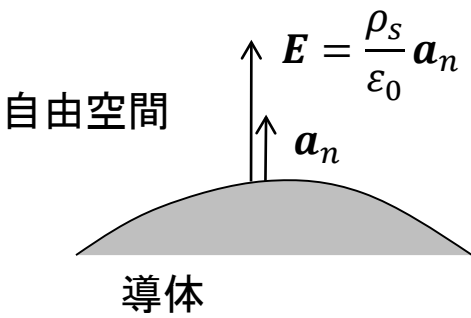
導体において電荷はその表面のみに存在可能

外部から導体に電荷が与えられるとき, 導体内部に電荷が存在できないので, 電荷は導体表面のみに分布する。

(7) クーロンの定理(導体表面における電界)

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} a_n \tag{5.5}$$

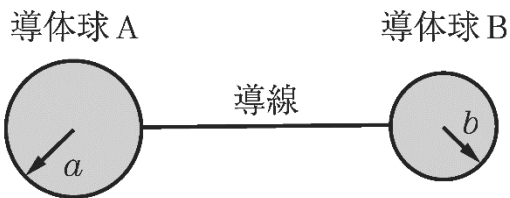
ρ_s : 導体表面の面電荷密度



(8) 導体内部および表面は等電位である

(理由) $E = -\nabla V = 0$ の関係から $V = \text{一定}$ となる。

例題5.1 十分に離れた半径 a, b の二つの導体球が細い導線で接続されている。この構造に対して Q の電荷を与えると、各導体球面における電界の大きさを求めよ。



【解答】 $Q = Q_a + Q_b$
 $V_a = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b} = V_b$

}

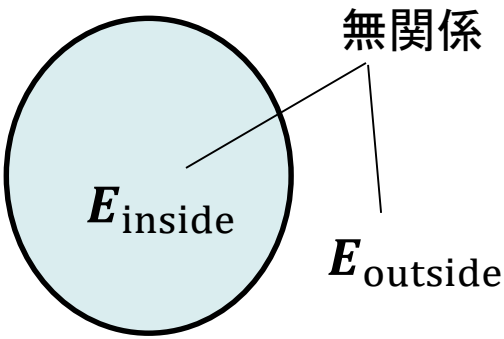
$Q_a = \frac{Qa}{a+b}, Q_b = \frac{Qb}{a+b}$

$$\therefore E_a = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (a+b)a}, \quad E_b = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (a+b)b}$$

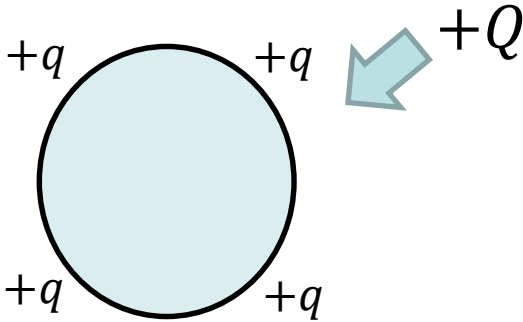
これから、 $a \gg b$ であるとき、 $E_b \gg E_a$ となることがわかる。⇒ 避雷針の原理

(9) 静電遮蔽(しゃへい)

導体の内部がくり抜かれた中空導体(空洞ありの導体)について、中空部の電界は、導体の外側の電界とは無関係であり、中空部の形状とその内部の電荷分布だけで決定される。

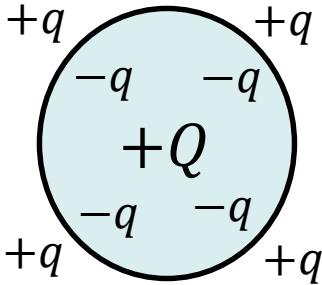


- ① 中空部に電荷を置かなければ、外部から与えた電荷は外部表面にのみ分布する。このとき、中空部分に電界は生じない。



- ② 中空部に電荷を置くと、等量異符号の電荷が導体の内表面に誘導され、等量同符号の電荷が外表面に分布する。

(理由は教科書pp.76-77参照)



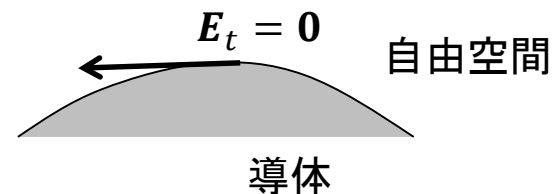
5.2 境界条件:

自由空間と導体の境界における電界

自由空間と導体との間の境界条件

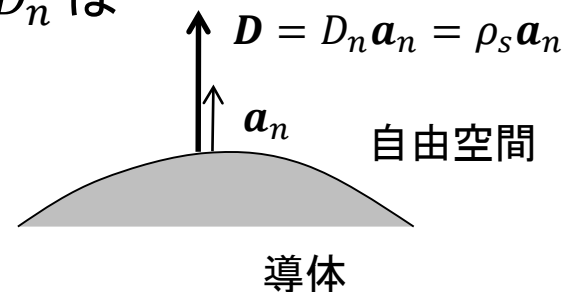
条件 ① 導体表面において、電界の接線成分 E_t は 0 である。

$$E_t = 0 \quad (5.8)$$



条件 ② 導体表面において、電束密度の法線成分 D_n は面電荷密度に等しい。(クーロンの定理)

$$D_n = \rho_s \quad (5.9)$$

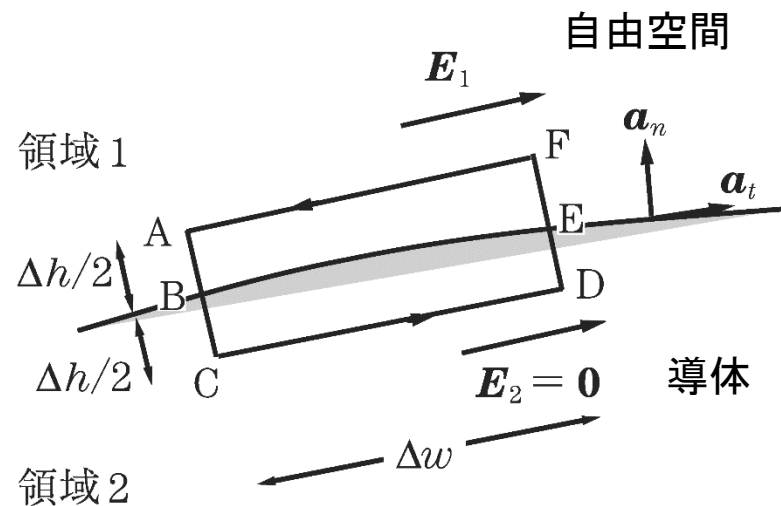


〔条件① $E_t = 0$ の証明〕

出発式 $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (4.4)$

線積分の変形

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D \\
 &\quad + \int_D^E + \int_E^F + \int_F^A \\
 &= \mathbf{E}_1 \cdot \int_A^B d\mathbf{r} + \mathbf{E}_2 \cdot \int_B^C d\mathbf{r} + \mathbf{E}_2 \cdot \int_C^D d\mathbf{r} \\
 &\quad + \mathbf{E}_2 \cdot \int_D^E d\mathbf{r} + \mathbf{E}_1 \cdot \int_E^F d\mathbf{r} + \mathbf{E}_1 \cdot \int_F^A d\mathbf{r} \\
 &= \mathbf{E}_1 \cdot \left(-\frac{\Delta h}{2} \mathbf{a}_n \right) + \mathbf{E}_2 \cdot \left(-\frac{\Delta h}{2} \mathbf{a}_n \right) + \mathbf{E}_2 \cdot (\Delta w \mathbf{a}_t) \\
 &\quad + \mathbf{E}_2 \cdot \left(\frac{\Delta h}{2} \mathbf{a}_n \right) + \mathbf{E}_1 \cdot \left(\frac{\Delta h}{2} \mathbf{a}_n \right) + \mathbf{E}_1 \cdot (-\Delta w \mathbf{a}_t) \\
 &\xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{a}_t \Delta w \stackrel{\mathbf{E}_2=0}{=} -\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_t \Delta w = 0
 \end{aligned}$$

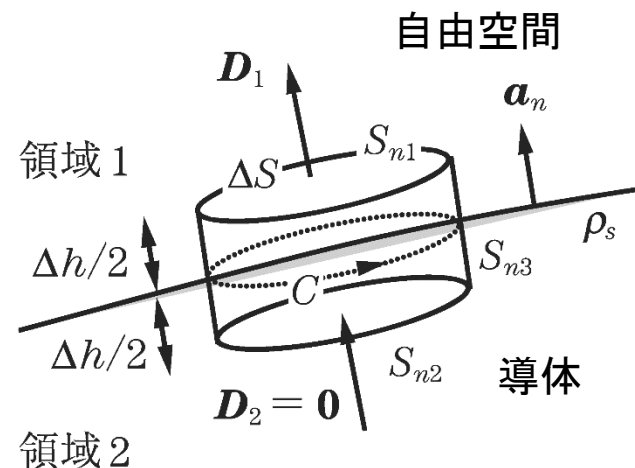


〔条件② $D_n = \rho_s$ の証明〕

出発式 $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enclosed by } S} \quad (3.9)$

面積分の変形

$$\begin{aligned}
 \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_{n1}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{n2}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{n3}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a}_n \iint_{S_{n1}} dS + \mathbf{D}_2 \cdot (-\mathbf{a}_n) \iint_{S_{n2}} dS \\
 &\quad + \int_0^{\Delta h/2} \left(\oint_C \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{r} \right) dl + \int_{-\Delta h/2}^0 \left(\oint_C \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{r} \right) dl \\
 &= \{ \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a}_n + \mathbf{D}_2 \cdot (-\mathbf{a}_n) \} \Delta S + \frac{\Delta h}{2} \left(\oint_C \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{r} \right) \\
 &\xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} \{ \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a}_n + \mathbf{D}_2 \cdot (-\mathbf{a}_n) \} \Delta S \stackrel{\mathbf{D}_2=0}{=} \boxed{\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a}_n} \Delta S \\
 &= Q_{\text{enclosed by } S} = \boxed{\rho_s} \Delta S
 \end{aligned}$$



5.3 電気影像法

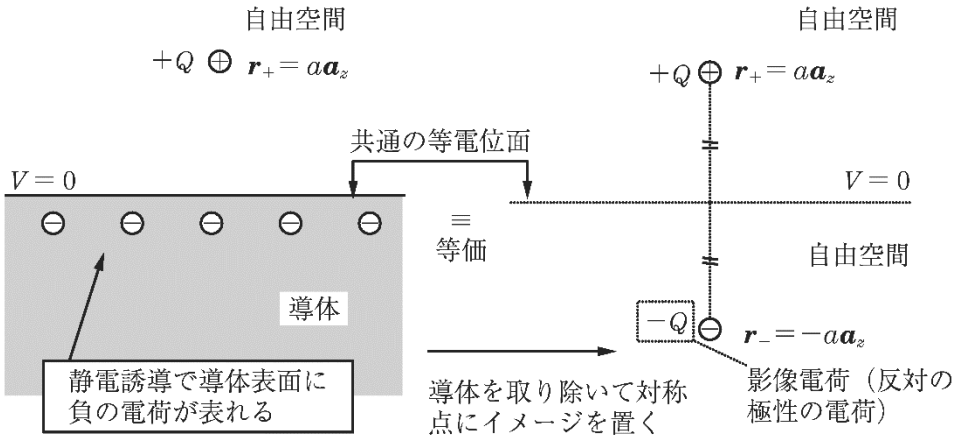
(0) 電気映像法の流れ

境界条件を満足させつつ，導体を取り除き，適切な位置（導体が存在した領域のいずれか）に点電荷（映像電荷）を置き，与えられた問題を元の点電荷と映像電荷の重ね合わせとして考える。

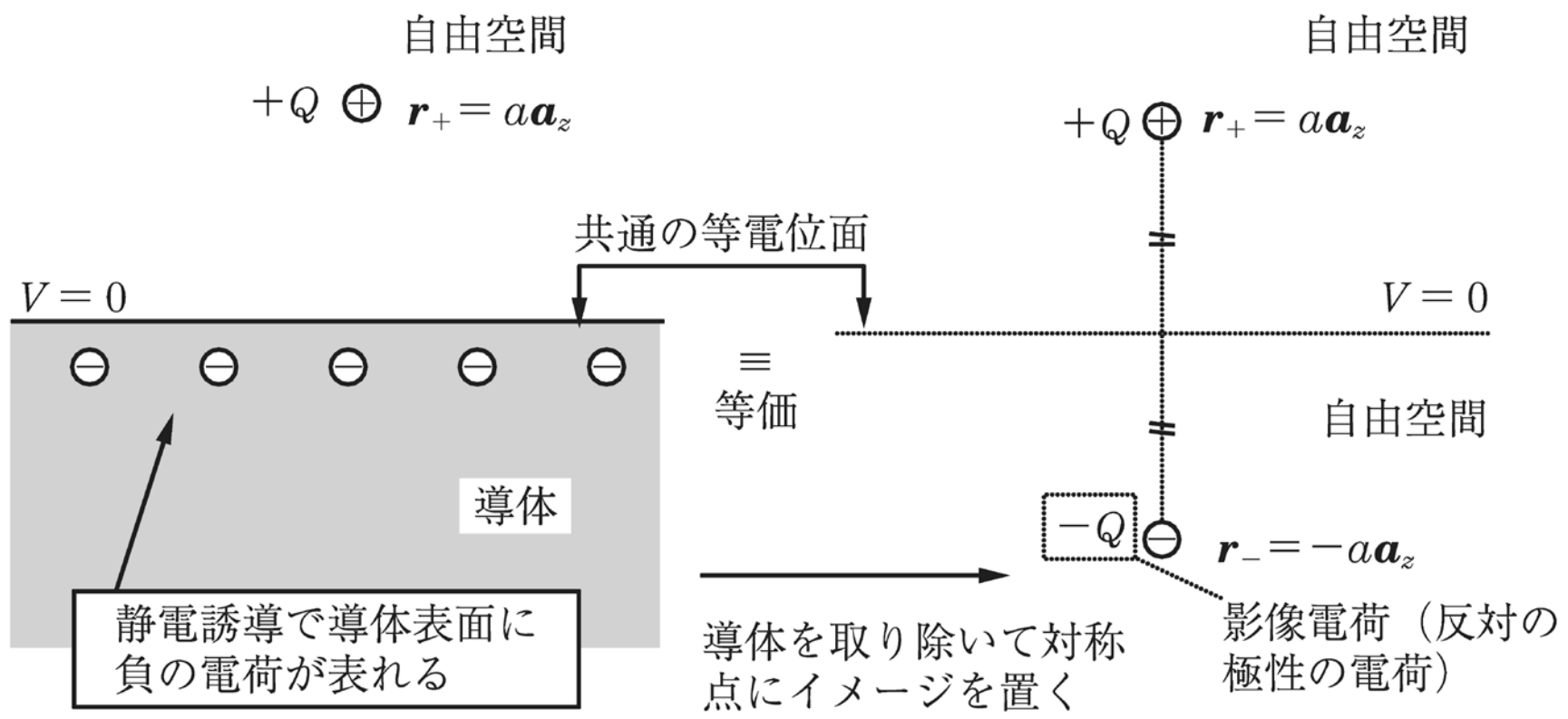
(1) 電気映像法の適用条件

- ① 映像電荷を置いた後，導体を除く空間における電荷分布に変更がないこと（導体の存在した空間での電荷分布や電界は変わってもよい）
- ② 得られた解は，境界条件を満足していること
- ③ 得られた解は，ポワソンの方程式を満足していること（自動的に満足）

条件①と②を満足するように映像電荷を配置すればよい。



(2) 導体面上に置かれた点電荷



例題5.2 $z < 0$ が導体であり、点 $P(0, 0, a)$ に点電荷 Q が配置されているとする。電気映像法を用いて、導体表面上部 ($z > 0$) における電位、電界を決定せよ。また、導体表面 S に誘起する電荷の総量が $-Q$ であることを確認せよ。

【解答】電気映像法により、導体を取り去り、点 $P'(0, 0, -a)$ に $-Q$ の点電荷を配置する。このとき、導体表面上部 ($z > 0$) における電位、電界は次のように与えられる。

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|}$$

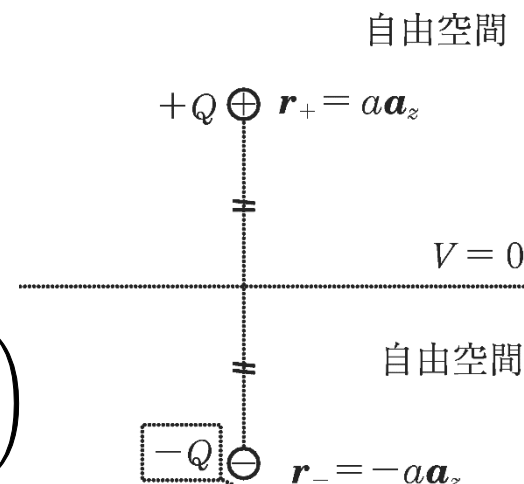
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + y^2 + (z + a)^2]^{3/2}} \right\} \mathbf{a}_x$$

$$+ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{y}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{3/2}} - \frac{y}{[x^2 + y^2 + (z + a)^2]^{3/2}} \right\} \mathbf{a}_y$$

$$+ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{z - a}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{3/2}} - \frac{z + a}{[x^2 + y^2 + (z + a)^2]^{3/2}} \right\} \mathbf{a}_z$$



導体表面における電界

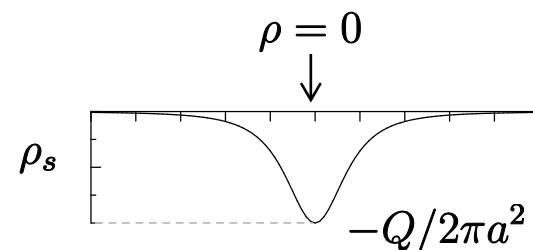
$$\mathbf{E}(x, y, 0) = E_z(x, y, 0)\mathbf{a}_z = -\frac{aQ}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

導体表面における面電荷密度(クーロンの定理)

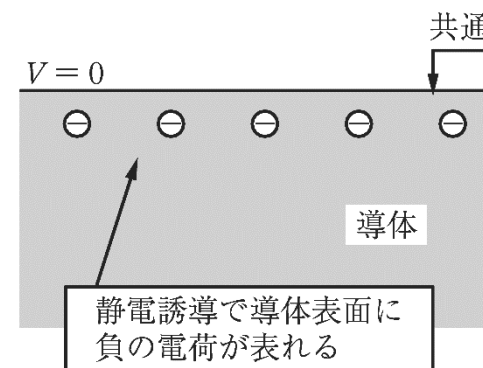
$$\begin{aligned}\rho_s &= \epsilon_0 E_z(x, y, 0) = -\frac{aQ}{2\pi(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{aQ}{2\pi(\rho^2 + a^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

導体表面に誘起される電荷の総量

$$\begin{aligned}\iint_S \rho_s dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho_s \rho d\rho d\phi \\ &= -\frac{aQ}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{aQ}{2\pi} \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right]_0^\infty = -\frac{aQ}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{a} \\ &= -Q\end{aligned}$$



自由空間
 $+Q \oplus \mathbf{r}_+ = a\mathbf{a}_z$



※ 導体表面に生じた誘導電荷は、導体の上方に置いた点電荷の電荷に負号を付けたものに等しい。

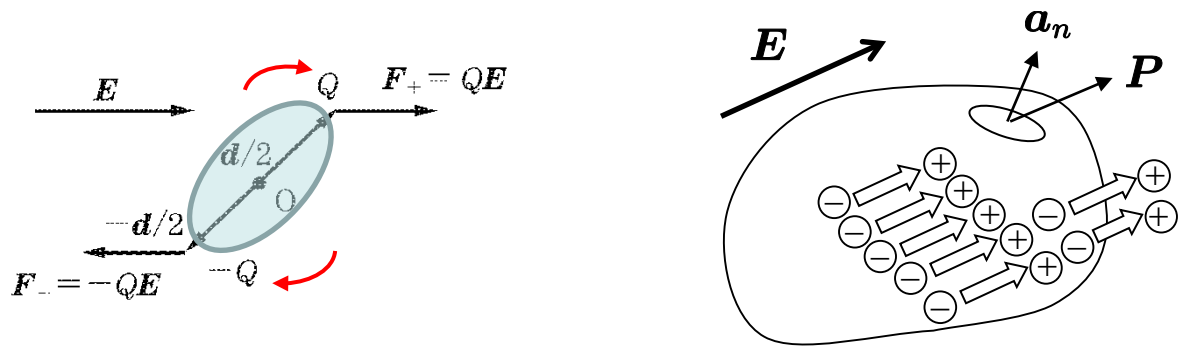
5.4 誘電体の性質

(1) 誘電体： 自由電荷が存在しない物質，絶縁体ともいう。

※ 電荷は原子や分子間力で位置を拘束されるが，外部電界により微小変位は許されるため，誘電体は電気エネルギーを充填することが可能である。

(2) 誘電分極

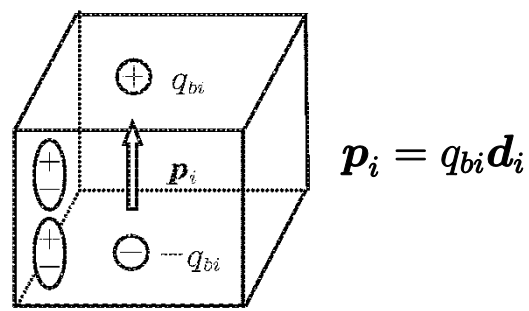
外部電界により，誘電体内部では微視的に正と負の電荷（束縛電荷）に分離し，多数の電気双極子を構成する。このため，電気双極子にトルクが生じ，その双極子モーメントが電界の向きに傾くことで，内部電界が生じる。



(3) 分極： 単位体積当たりの双極子モーメントの総和

$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n p_i \quad [\text{C/m}^2] \quad (5.10)$$

※ 単位面積当たりの束縛電荷の流れ（電束）の密度（電束密度）とみなすことができる。



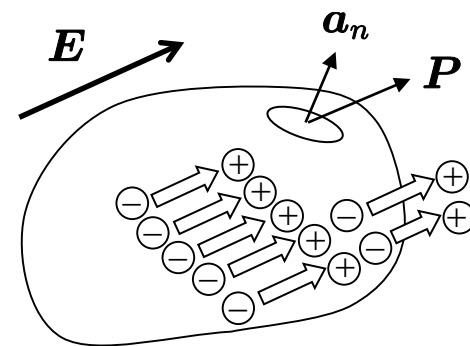
(3') 誘電分極と誘電体表面に現れる電荷

外部電界により、電気双極子の正の電荷は電界の向きに、負の電荷は電界と逆向きに微小変位し、電気双極子は電界と同じ向きになり、誘電体表面に束縛電荷が現れる。

(4) 誘電体内部における束縛電荷の総量

誘電体表面において、単位面積当り $\rho_{sb} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$ の電荷が誘電体表面より外に出れば、誘電体内部には $-\rho_{sb} = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$ の電荷が残される。これから、誘電体内部における束縛電荷の総量 Q_b は、面電荷密度 $-\rho_{sb}$ を面積分することにより与えられる。

$$\begin{aligned}
 Q_b &= - \oiint_S \rho_{sb} dS \\
 &= - \oiint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n dS = - \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$



5.5 誘電体内部における電界

(1) 誘電体内部におけるガウスの法則

ガウスの法則

$$\oiint_S \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \underbrace{Q + Q_b}_{Q_{\text{enclosed by } S}} \quad (3.9)$$

$$Q_b = - \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.11)$$

変形すると

$$Q = \oiint_S \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - Q_b = \oiint_S \underbrace{(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}_{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{S}$$

整理すると

電束密度の再定義

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (5.12)$$

ガウスの法則

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (5.13)$$

ガウスの法則の微分形

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (5.14)$$

(2) **誘電率**： 電束密度と電界との間の比例係数(線形媒質の場合)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad (5.15)$$

比誘電率： 自由空間の誘電率に対する比

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \qquad (5.16)$$

物質	ε_r	物質	ε_r	物質	ε_r
空気	1.0005	ガラス	4-7	石英	3.8
エチルアルコール	25	氷	4.2	シリコン	11.8
ベークライト	4.74	紙	3	塩化ナトリウム	5.9
雪	3.3	土 (乾燥状態)	2.8	蒸留水	80
テフロン	2.1	木 (乾燥状態)	1.4-4	ポリエチレン	2.26

(3) **電気分極率**： 分極と電界との間の比例係数(線形媒質の場合)

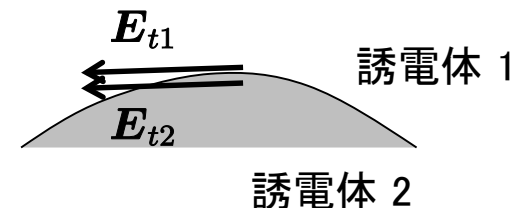
$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad (5.17)$$

5.6 境界条件： 誘電体境界における電界

(1) 誘電体と誘電体との間の境界条件

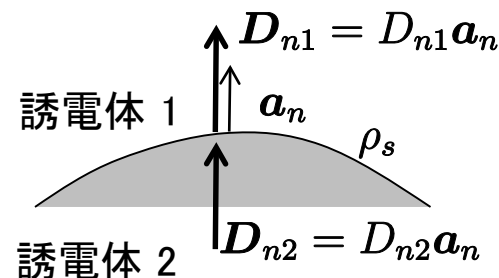
条件 ① 境界において、電界の接線成分が等しい。

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \quad (5.19)$$



条件 ② 境界において、電束密度の法線成分の不連続分は面電荷密度に等しい。

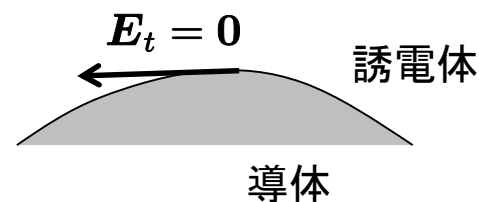
$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (5.20)$$



(2) 誘電体と導体との間の境界条件

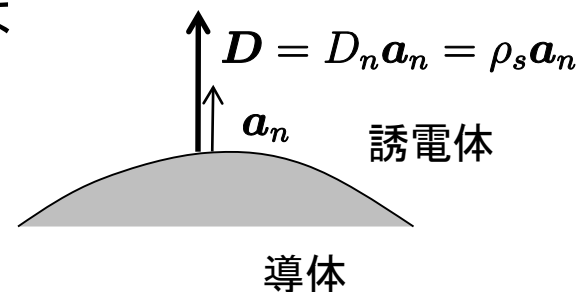
条件 ① 導体表面において、電界の接線成分は0である。

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{0} \quad (5.8)$$



条件 ② 導体表面において、電束密度の法線成分は面電荷密度に等しい。(クーロンの定理)

$$D_n = \rho_s \quad (5.9)$$



例題5.3 図に示すように、誘電体内で電界 E_d に垂直ならびに平行に空隙を設ける。空隙内は空気とし、その幅は十分に狭いものとする。また、誘電体の比誘電率を ε_r とする。このとき、空隙内の電界 E_a を求めよ。

【解答】 a) 空隙が電界と平行な場合、境界において電界の接線成分が等しいことから

$$E_a = E_d$$

となる。つまり、空隙内の電界は誘電体内の電界に等しい。

b) 空隙が電界と垂直な場合、境界において電束密度の法線成分が等しいことから

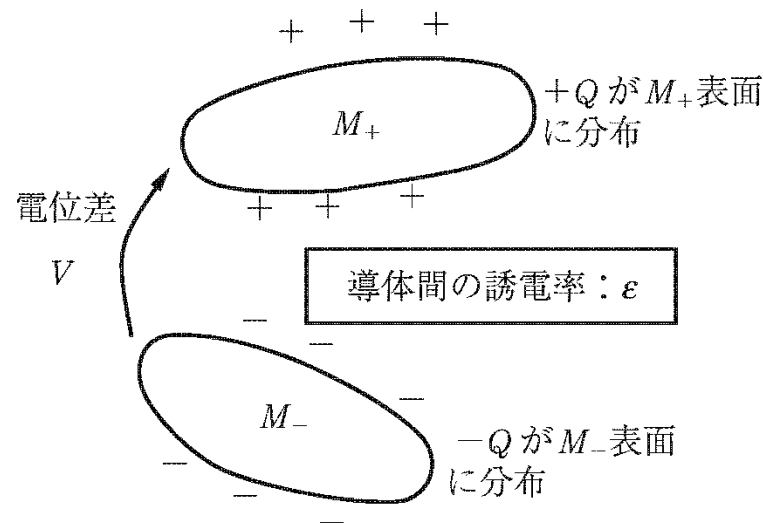
$$\varepsilon_0 E_a = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_d \quad \text{すなわち} \quad E_a = \varepsilon_r E_d$$

となる。つまり、空隙内の電界は誘電体内の電界の ε_r 倍だけ強くなる。

5.7 静電容量

(1) 静電容量の定義

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}} \quad (5.21)$$



(1-a) コンデンサ or キャパシタ

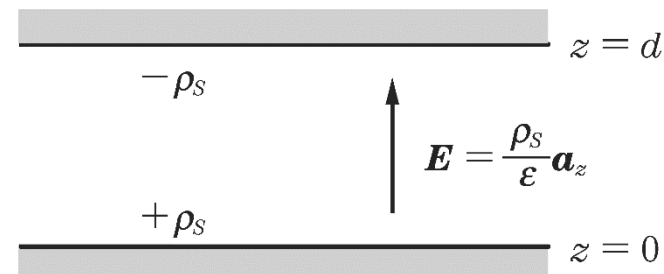
- ・ 二つの孤立した導体からなる構成
- ・ 電荷を蓄積できるため、さまざまな回路で多く利用されている。
- ・ その能力は静電容量(単位電位差あたり蓄電可能な電荷量)により表現され、導体の大きさや位置、誘電体の充填の具合で決まる。

(1-b) 静電容量の計算方法

- ① (ア) 電荷分布を仮定し、電位差を計算する。
 (イ) 電位差を仮定し、電荷を計算する。
- } ⇒ 式(5.21)に代入する。
- ② 電荷分布を仮定し、電氣的蓄積エネルギーを計算する。
 ⇒ 式(5.31)に代入する。〔see 5.8節〕

(2) 平行平板コンデンサ

例題5.4 図に示すように、 $z = 0$ と $z = d$ に十分に大きい面積 S の導体平板を置き、平行平板コンデンサを構成する。 $z = 0$ の面に正の電荷が、 $z = d$ の面に負の電荷が一様に分布するとして、平行平板コンデンサの静電容量 C を計算せよ。



【解1】導体板の面積が十分に大きく、無限大であると仮定する。

$z = 0$ の面に面電荷密度 ρ_s の電荷が、 $z = d$ の面に面電荷密度 $-\rho_s$ の電荷が分布するとして、例題2.3の結果から、導体面の間の電界 E は

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{\epsilon} \mathbf{a}_z$$

と与えられる。これから、 $z = d$ の面を接地した場合の電位は

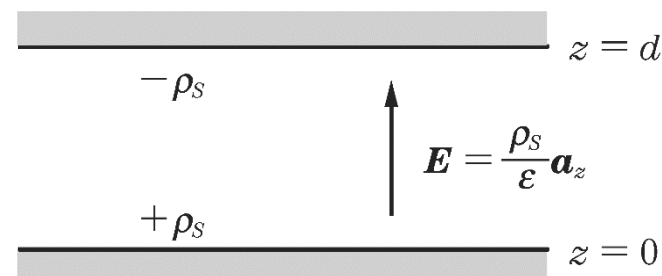
$$V = - \int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_d^0 E_z dz = - \int_d^0 \frac{\rho_s}{\epsilon} dz = \frac{\rho_s d}{\epsilon}$$

である。

一方, $z = 0$ の極板全体に分布している電荷の総量は $Q = \rho_s S$ であるから, 静電容量は

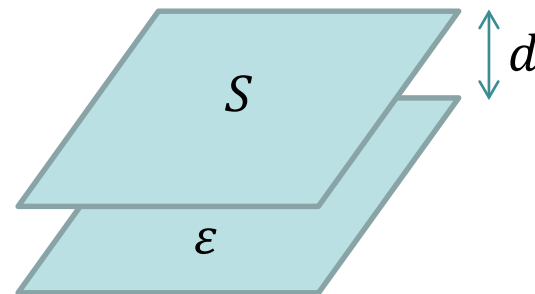
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s S}{\frac{\rho_s d}{\epsilon}} = \frac{\epsilon S}{d}$$

と与えられる。



〔平行平板コンデンサの静電容量の性質〕

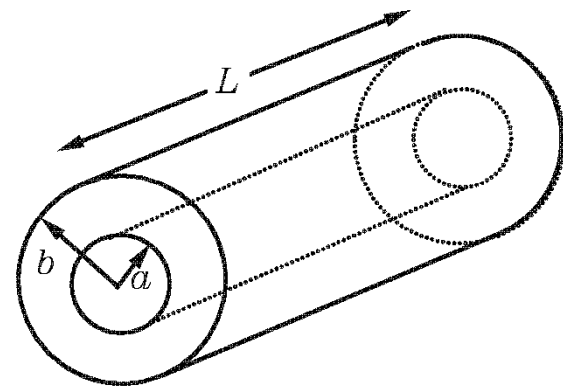
- ・ 極板間の誘電率 ϵ に比例する
- ・ 極板の面積 S に比例する
- ・ 極板の間隔 d に反比例する



静電容量を大きくするためには, 誘電率の大きい物質を極板間に充填し, 極板間の間隔を狭くし, 極板面積を大きくすればよい。

(3) 同軸円筒コンデンサ

例題5.5 図に示すように、 z 軸を共通の中心軸として、半径 $\rho = a$ の内導体円筒面と半径 $\rho = b$ の外導体円筒面を設け、同軸円筒コンデンサを構成する。 $\rho = a$ の面に正の電荷が、 $\rho = b$ の面に負の電荷が一樣に分布すると仮定して、同軸円筒コンデンサの長さ L 当りの静電容量 C を計算せよ。ただし、 $b > a$ とせよ。



【解答】 内導体の線電荷密度を ρ_l とするとき、静電誘導より、外導体には線電荷密度 $-\rho_l$ の電荷が誘起する。例題3.3の結果から、導体間の電界は

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon\rho} \mathbf{a}_\rho$$

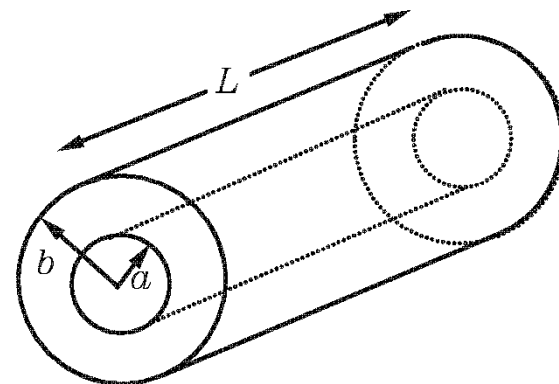
と与えられる。これから、導体間の電位差は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} V &= - \int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^a E_\rho d\rho = - \int_b^a \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon\rho} d\rho = - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} \\ &= - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} [\ln \rho]_b^a = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

一方、長さ L における電荷の総量は $Q = \rho_l L$ と与えられるから、静電容量は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_l L}{\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}}$$

と与えられる。



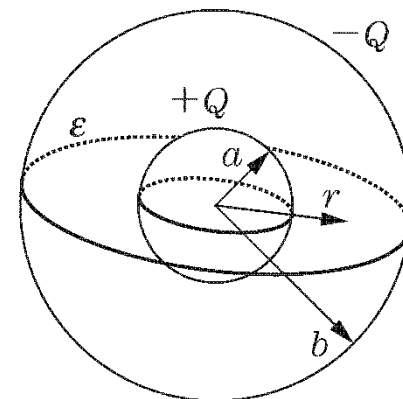
〔同軸円筒コンデンサの静電容量の性質〕

- ・ 極板間の誘電率 ϵ に比例する
- ・ 極板の面積(長さ L) に比例する
- ・ 極板の間隔を小さくする ($b/a \rightarrow 1$) と静電容量が増加する

静電容量を大きくするためには、誘電率の大きい物質を極板間に充填し、極板間の間隔を狭くし、極板面積を大きくすればよい。

(4) 球殻コンデンサ

例題5.6 図に示すように、原点を共通の中心とする、半径 a の内導体球面と半径 b の外導体球面を設け、球殻コンデンサを構成する。 $r = a$ の面に正の電荷が、 $r = b$ の面に負の電荷が一様に分布すると仮定して、球殻コンデンサの静電容量 C を計算せよ。ただし、 $b > a$ とせよ。



【解答】 内導体の全電荷を Q とするとき、静電誘導より、外導体の全電荷は $-Q$ となる。 $a < r < b$ となるように r を選ぶとき、半径 r の球面を閉曲面としてガウスの法則を適用すると、 $D_r \cdot 4\pi r^2 = Q$ となるので、導体間の電界 E は

$$E = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r$$

と与えられる。これから、導体間の電位差 V は

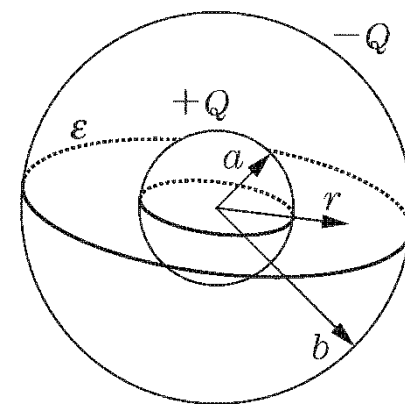
$$\begin{aligned} V &= - \int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^a E_r dr = - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_b^a \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{r} \right]_b^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

である。

したがって、静電容量は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

と与えられる。



〔球殻コンデンサの静電容量の性質〕 $C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b - a}$

- ・ 極板間の誘電率 ϵ に比例する
- ・ 両極板の面積の幾何平均に比例する ($\sqrt{4\pi a^2 \cdot 4\pi b^2} = 4\pi ab$)
- ・ 極板の間隔 $b - a$ を小さくすると静電容量が増加する

静電容量を大きくするためには、誘電率の大きい物質を極板間に充填し、極板間の間隔を狭くし、極板面積を大きくすればよい。

(5) 2種類の誘電体が挿入された平行平板コンデンサ

(5-a) 境界が極板に平行な場合

例題5.7 面積 S の2枚の導体板が間隔 d で平行に置かれている。極板面積は極板間隔に比べて十分に大きいと仮定する。図に示すように、極板に平行に二つの誘電体をすき間なく挿入した場合の極板間の静電容量を求めよ。ただし、各誘電体の誘電率、厚さをそれぞれ ε_1, d_1 ならびに ε_2, d_2 とする。

【解答】 下側の極板 ($z = 0$ 面) に Q の電荷を与える。静電誘導より、上側の極板 ($z = d$ 面) に $-Q$ の電荷が生じる。下側の極板上の面電荷密度 ρ_{s1} は、クーロンの定理の式(5.9)から、 $\rho_{s1} = D_{z1} = Q/S$ である。誘電体の境界で電束密度の垂直成分は連続であるから、すなわち、 $D_{z1} = D_{z2}$ より

$$E_{z1} = \frac{D_{z1}}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{\varepsilon_1 S}$$
$$E_{z2} = \frac{D_{z2}}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{\varepsilon_2 S}$$

である。

これらより、電位差を計算すると

$$\begin{aligned}
 V &= - \int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_d^0 E_z dz = - \int_{d_1+d_2}^{d_1} E_{z2} dz - \int_{d_1}^0 E_{z1} dz \\
 &= \frac{Q}{S} \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)
 \end{aligned}$$

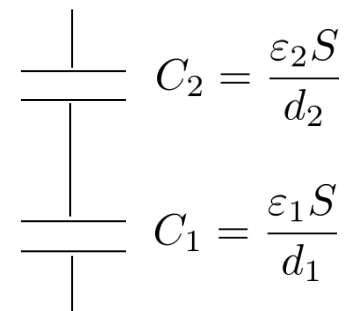
となる。ゆえに

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{S} \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)} = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S}}$$

と与えられる。

〔平行平板コンデンサの直列接続〕

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S} = \frac{1}{C}$$



(5-b) 境界が極板に垂直な場合

例題5.8 面積 S の2枚の導体板が間隔 d で平行に置かれている。極板面積は極板間隔に比べて十分に大きいと仮定する。図に示すように、極板に垂直に二つの誘電体をすき間なく挿入した場合の極板間の静電容量を求めよ。ただし、誘電率、極板に接する面積をそれぞれ ε_1, S_1 ならびに ε_2, S_2 とする。

【解答】 各誘電体領域の電位差 V は共通なので、誘電体内における電界が一定であるとすれば

$$E_{z1} = E_{z2} = \frac{V}{d}$$

クーロンの定理の式(5.9)により、 $z = 0$ の面における面電荷密度 ρ_{s1}, ρ_{s2} は

$$\rho_{s1} = D_{z1} = \varepsilon_1 E_{z1} = \frac{\varepsilon_1}{d} V$$

$$\rho_{s2} = D_{z2} = \varepsilon_2 E_{z2} = \frac{\varepsilon_2}{d} V$$

と与えられる。これから、 $z = 0$ の面全体の電荷の総量は次のようになる。

$$Q = \rho_{s1} S_1 + \rho_{s2} S_2 = \left(\frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d} \right) V$$

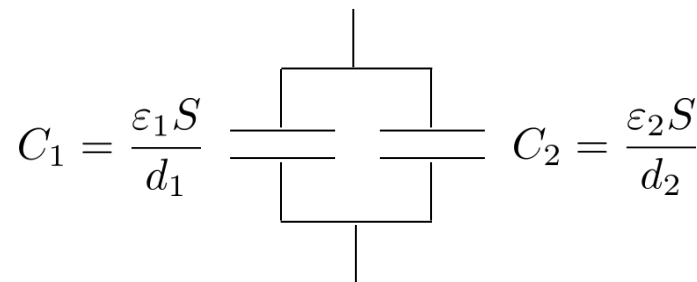
したがって、静電容量は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d}$$

と与えられる。

〔平行平板コンデンサの並列接続〕

$$C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d} = C$$



5.8 電氣的蓄積エネルギー

(1) 電氣的蓄積エネルギーの回路的表現

電界 E に逆らって電荷 Q を dr だけ変位させるのに要する仕事は

$$dW_e = -\mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = Q(-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}) = QdV$$

と与えられる。コンデンサの極板に蓄えられる電荷を Q とし、極板間の電位差を V とすれば、 $V = Q/C$ の関係から

$$dV = \frac{1}{C}dQ$$

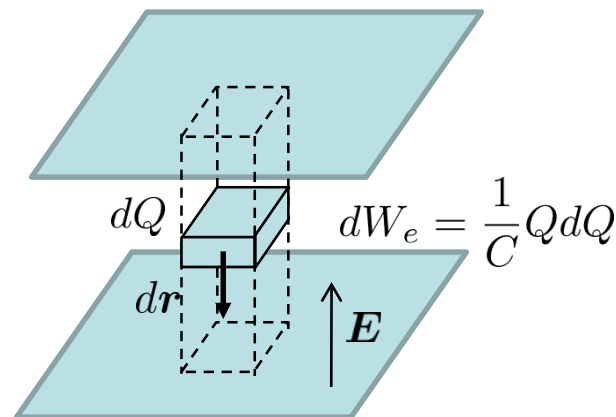
となる。ただし、 C は静電容量であり、電荷 Q および電位差 V に無関係な定数である。このとき

$$dW_e = \frac{1}{C}QdQ$$

と与えられるから、極板の電荷を 0 から Q まで帯電させるのに要する仕事は

$$W_e = \int_0^Q \frac{Q}{C}dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (5.27)$$

と与えられる。これがコンデンサの電氣的蓄積エネルギーの回路的表現となる。



(2) 電氣的蓄積エネルギーとそのエネルギー密度

$$\begin{aligned} W_e &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} Q_i V_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\rho_v \Delta v_i) V_i \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iiint_v \frac{1}{2} \rho_v V dv = \frac{1}{2} \iiint_v (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv \quad \text{ベクトル恒等式} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_v \nabla \cdot (V \mathbf{D}) dv - \frac{1}{2} \iiint_v (\nabla V) \cdot \mathbf{D} dv \quad \nabla \cdot (V \mathbf{D}) = \nabla V \cdot \mathbf{D} + V \nabla \cdot \mathbf{D} \\ &\quad \downarrow \text{ガウスの発散定理} \quad \swarrow \mathbf{E} = -\nabla V \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\oint_S V \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}_{=0} + \iiint_v \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} dv = \iiint_v \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} dv \\ \therefore V \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{Q^2 \sin\theta d\theta d\phi}{16\pi^2 \epsilon r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

これから

電氣的蓄積エネルギー

静電界のエネルギー密度

$$W_e = \iiint_v w_e dv = \iiint_v \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} dv \quad (5.29)$$

$w_e = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}$

 (5.30)

(3) 電氣的蓄積エネルギーによる静電容量の表現

$$\frac{1}{C} = \frac{2W_e}{Q^2} = \frac{1}{Q^2} \iiint_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv = \frac{1}{Q^2} \iiint_v \varepsilon |\mathbf{E}|^2 dv \quad (5.31)$$

例題5.9 内径 a 、外径 b の同軸ケーブル中に、その中心軸から半径 c の円筒面を境として、その内側を比誘電率 ε_{r1} 、外側を比誘電率 ε_{r2} の誘電体で満たしたとき、単位長さあたりの静電容量 C を求めよ。
ただし、 $a < c < b$ とする。

【解答】 誘電体境界において電束密度の法線成分が連続であることに注意してガウスの法則を適用する。同軸ケーブルの中心軸を z 軸に選ぶ。閉曲面 S として、中心が z 軸上にあるような半径 ρ 、長さ1の円筒面を考える。内導体に単位長さ当たり ρ_l の電荷を与えると、式(3.15)より、電束密度は

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_l}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho$$

と与えられる。

これから、単位長当りの電氣的蓄積エネルギーは

$$\begin{aligned}
 W_e &= \iiint_v \frac{1}{2\varepsilon} |\mathbf{D}|^2 dv \\
 &= \frac{1}{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_a^c \left(\frac{\rho_l}{2\pi\rho} \right)^2 \rho d\rho d\phi dz \\
 &\quad + \frac{1}{2\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_c^b \left(\frac{\rho_l}{2\pi\rho} \right)^2 \rho d\rho d\phi dz \\
 &= \frac{\rho_l^2}{4\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \int_a^c \frac{d\rho}{\rho} + \frac{\rho_l^2}{4\pi\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} \int_c^b \frac{d\rho}{\rho} \\
 &= \frac{\rho_l^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \ln \frac{b}{c} \right)
 \end{aligned}$$

となるので、静電容量は

$$C = \frac{(\rho_l \cdot 1)^2}{2W_e} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \ln \frac{b}{c}}$$

と与えられる。

5.9 仮想変位と電界の及ぼす力

仮想仕事の原理

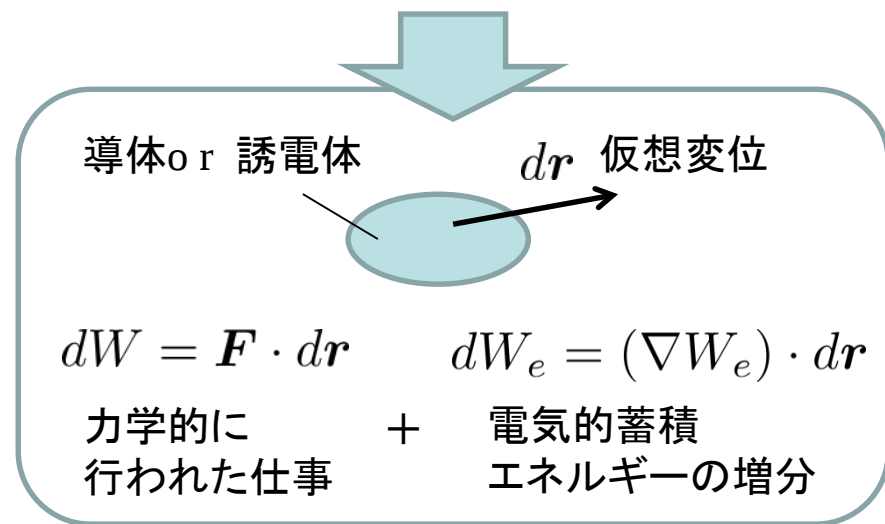
電界内で、導体 or 誘電体が $d\mathbf{r}$ の仮想変位をした場合、系のエネルギー収支の変化分に着目する。

$$dW_e + dW = dW_s \quad (5.32)$$

あるいは

$$(\mathbf{F} + \nabla W_e) \cdot d\mathbf{r} = dW_s \quad (5.33)$$

系に入力される仕事 dW_s



(1) 系に対する入力エネルギーが存在しない場合 $dW_s = 0$

$$\mathbf{F} = -\nabla W_e \quad (5.34)$$

(2) 各物体の電位が一定である場合 $V_i = \text{const}$

$$W_e = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} C_i V_i^2$$

$$\begin{aligned} dW_s &= \sum_{i=1}^n V_i dQ_i = \sum_{i=1}^n V_i d(C_i V_i) = \sum_{i=1}^n V_i^2 dC_i = d \left(\sum_{i=1}^n C_i V_i^2 \right) \\ &= d(2W_e) = 2dW_e \end{aligned}$$

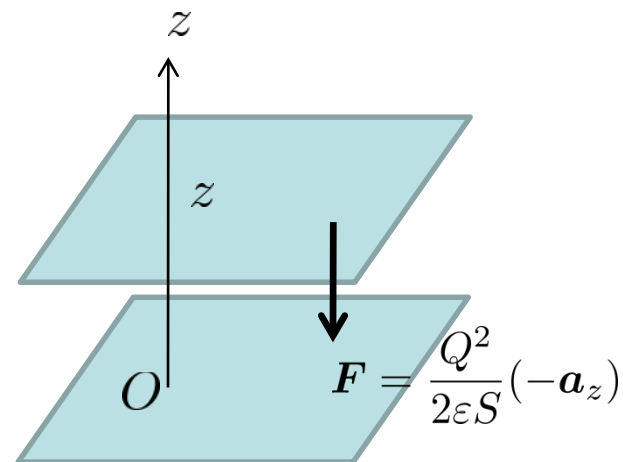
(2) 各物体の電位が一定である場合(続き)

$$\mathbf{F} = \nabla W_e \quad (5.35)$$

例題5.10改 静電容量が $C = \varepsilon S/z$ で与えられるようなコンデンサに作用する力 $\mathbf{F}$ を求めよ。ただし、 ε, S は定数とする。

【解答】 a) $Q = \text{一定の場合}$ 、 $W_e = Q^2/2C$ より

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\partial W_e}{\partial z} \mathbf{a}_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) \mathbf{a}_z = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{dz} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{Q^2}{2(\varepsilon S/z)^2} \varepsilon S \left(-\frac{1}{z^2} \right) \mathbf{a}_z = \frac{Q^2}{2\varepsilon S} (-\mathbf{a}_z) \end{aligned}$$



b) $V = \text{一定の場合}$ 、 $W_e = CV^2/2$ より

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial W_e}{\partial z} \mathbf{a}_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} CV^2 \right) \mathbf{a}_z = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dz} \mathbf{a}_z = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{dz} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{Q^2}{2(\varepsilon S/z)^2} \varepsilon S \left(-\frac{1}{z^2} \right) \mathbf{a}_z = \frac{Q^2}{2\varepsilon S} (-\mathbf{a}_z) \end{aligned}$$

6章 電流と抵抗

- 6.1 電流と電流密度
- 6.2 電流の連続性
- 6.3 オームの法則の微分形

6.1 電流と電流密度

(1) 電 流 (スカラー量)

与えられた基準点(面)を単位時間当り通過する電荷量

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [\text{A}] = [\text{C/s}] \quad (6.1)$$

(2) 電流密度 (ベクトル量)

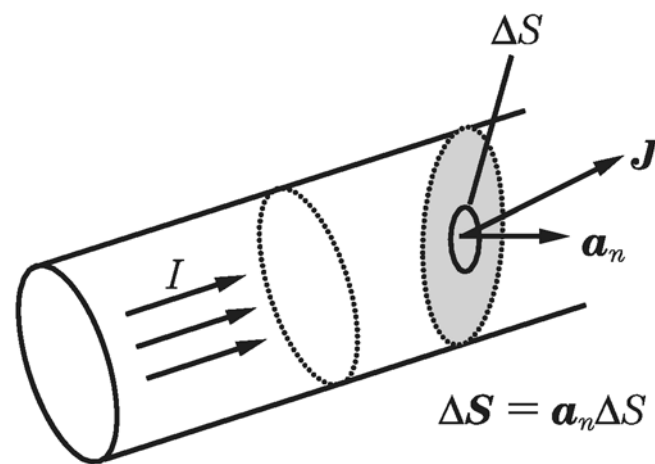
大きさを電流が流れる方向に垂直な断面を通過する単位面積当りの電流とし, 向きを電流の流れる方向とするようなベクトル量

$$\Delta I = J_n \Delta S = \mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_n \Delta S = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

電流が流れる面全体に拡張して

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.2)$$

※電流密度の面積分が電流を与える



(3) 電流密度と自由電荷の平均速度

微小領域 Δv に含まれる電荷量

$$\Delta Q = \rho_v \Delta v = \rho_v \Delta S \Delta x$$

微小領域 Δv における電流

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \\ &= \rho_v \Delta S \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \underline{v_x} \end{aligned}$$

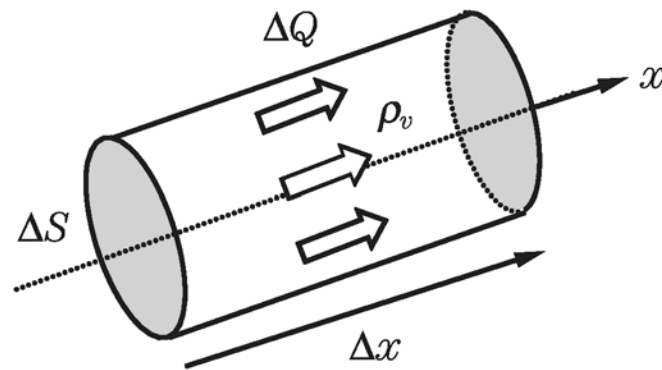
$v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_x$: 自由電荷の平均速度 $\mathbf{v}$ の x 成分

電流密度の x 成分

$$J_x = \frac{I}{\Delta S} = \rho_v v_x$$

導電電流における電流密度と自由電荷の平均速度の関係

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} \quad (6.3)$$



6.2 電流の連続性

(1) 電荷保存則

正あるいは負の電荷は単独に発生もしくは消失しない

(2) 連続の式

電荷の発生, 消失などが平衡状態に達したとき, 閉曲面 S から流出する電流, すなわち, 電荷の流出量は閉曲面 S の内部における電荷の減少量に等しい。

$$I_{\text{net through } S} = - \frac{\partial Q_{\text{enclosed by } S}}{\partial t} \quad (6.4)$$

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_v \rho_v dv \quad (6.5)$$

ガウスの発散定理

時間微分と体積分の
演算順序を交換

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{J} dv = \iiint_v \left(- \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right) dv \quad (6.6)$$

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (6.7)$$

(3) キルヒホッフの電流則 (回路網解析における基本則の一つ)

時間的な変化がない($\Rightarrow \omega = 0$)定常電流に関する電荷保存則 or 連続の式から導かれる。式(6.5)から

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.9)$$

図示の三分岐導線に対して

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} &= \oiint_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S} \\ &+ \oiint_{S_2} \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S} \\ &+ \oiint_{S_3} \mathbf{J}_3 \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (6.10)$$

すなわち

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (6.11)$$

6.3 オームの法則の微分形

(1) 電流密度と電界の関係

オームの法則

$$V = RI \quad (6.12)$$

微小導線区間におけるオームの法則

$$I - \frac{V}{\Delta R} = \mathbf{J} \cdot (\Delta S \mathbf{a}_n) - \frac{\mathbf{E} \cdot (\Delta l \mathbf{a}_n)}{\Delta R} = \left[\mathbf{J} - \underbrace{\frac{\Delta l}{\Delta R \Delta S}}_{=\sigma} \mathbf{E} \right] \cdot (\Delta S \mathbf{a}_n) = 0$$

これから、**オームの法則の微分形**が得られる

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}} \quad (6.13)$$

ただし、 σ は導電率と呼ばれ、単位は[S/m]である。導電率は、形状によらない媒質固有の量であり、媒質の電流の通りやすさを示す。

$$\Delta R = \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S} \Rightarrow \text{抵抗は長さに比例し、断面積に反比例する}$$

表6.1 代表的な物質の導電率

物質	σ [S/m]	物質	σ [S/m]	物質	σ [S/m]
アルミニウム	3.82×10^7	金	4.10×10^7	海水	5
銅	5.80×10^7	真ちゅう	1.5×10^7	蒸留水	10^{-4}
銀	6.17×10^7	半田	0.7×10^7	土(砂)	10^{-5}

(2) 電界が一様でない場合の抵抗

$$R = \frac{V}{I} = - \int_{-}^{+} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} / \oiint_S \sigma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \quad (6.14)$$

※ 静電容量の式との類似性に注目せよ ⇒ 章末問題【2】

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = - \int_{-}^{+} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} / \oiint_S \epsilon \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \quad (5.21') \quad \Rightarrow \quad RC = \epsilon / \sigma$$

(3) 緩和時間

導体内部における体積電荷密度に関連する式を結合させる

$$-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_v \quad (6.15)$$

連続の式
 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$
 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$
 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$

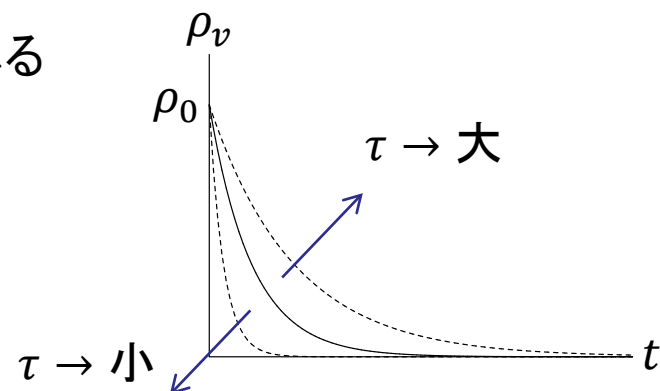
※ 微分方程式の解き方 ⇒ 章末問題【1】

$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_v = 0$ の両辺に $e^{(\sigma/\varepsilon)t} = e^{t/\tau}$ を乗じる

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} e^{t/\tau} + \frac{1}{\tau} \rho_v e^{t/\tau} = \frac{\partial (\rho_v e^{t/\tau})}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \rho_v e^{t/\tau} = \rho_0 (= \text{定数})$$

$$\therefore \rho_v = \rho_0 e^{-t/\tau}$$



体積電荷密度は時間とともに、時定数 $\tau = \varepsilon/\sigma$ で指数関数的に減衰する。

この時定数を緩和時間といい、導体内部の電荷が表面に到達し、面電荷を形成するのに要する時間に相当する。

(4) 電力とジュールの法則

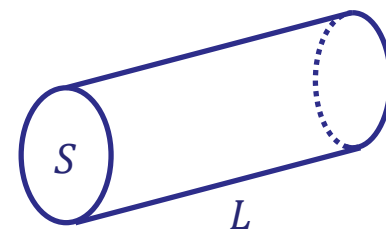
電力(=仕事率): 単位時間あたりの仕事

$$\begin{aligned}
 dP &= \frac{d(dW)}{dt} = \frac{d}{dt}(dQE \cdot d\mathbf{r}) = dQE \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\
 &= (\rho_v dv) \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot (\rho_v \mathbf{v}) dv = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

自由電荷によって運ばれる全電力

$$P = \iiint_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv \quad [\text{W}] \quad (6.18)$$

断面が一様で、断面積 S 、長さ L の導体において、電界および電流密度が長さ方向に向いている場合



$$P = \int_L E dl \iint_S J dS = VI$$



電気回路における『電力』の定義

7章 定常磁界

7.1 ビオ・サバルの法則

7.1.1 アンペアの右ねじの法則

7.1.2 電流分布とその数学的表現

7.1.3 ビオ・サバルの法則とその数学的表現

7.1.4 ビオ・サバルの法則の積分形

7.2 アンペアの周回路の法則

7.2.1 鎖交

7.2.2 アンペアの周回路の法則の導出

7.2.3 アンペアの周回路の法則の適用

7.3 回転とストークスの定理

7.3.1 回転

7.3.2 ストークスの定理

7.4 磁界に関するガウスの法則

7.5 ベクトルポテンシャル

7.1 ビオ・サバールの法則

7.1.1 アンペアの右ねじの法則

(1) 磁界の発見

1820年, エルステッドは電流が磁界をつくることを発見

磁界: 自然界における基本的な場の一つで, 磁性体(棒磁石など)や電流に流れる媒質の近くに現れる。

(2) 磁力線

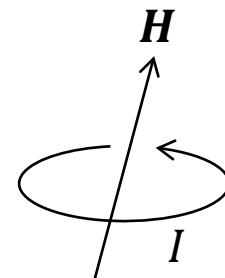
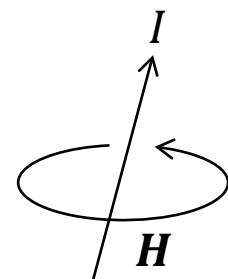
磁界 H に接する曲線群, すなわち, $H \parallel dr$ となる曲線群

※磁力線に関する偏微分方程式

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z}$$

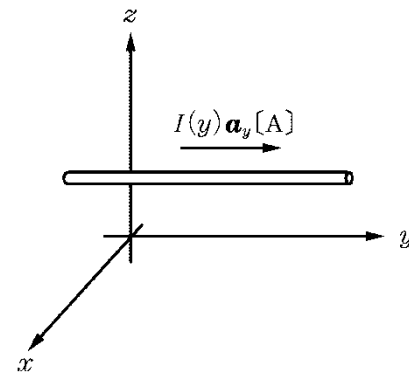
(3) アンペアの右ねじの法則

- ・磁力線に沿って右ねじが進む方向と電流の向きは一致
- ・電流に沿って右ねじが進む方向と磁界の向きは一致

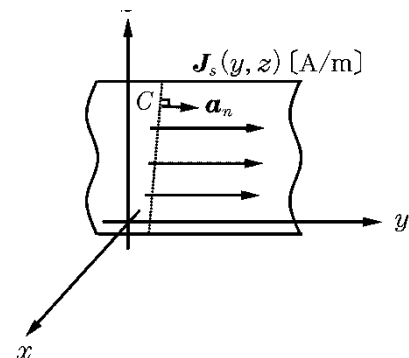


7.1.2 電流分布とその数学的表現

(1) 線電流分布: 曲線に沿って電流が存在する分布
電流 I [A] とその向きを表す単位ベクトルで記述

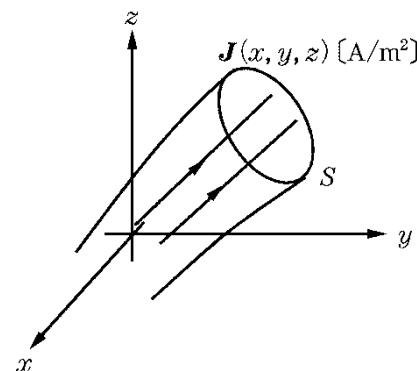


(2) 面電流分布: 曲面上に電流が存在する分布
曲面上のある曲線 C を単位長さ当り横切る電流とその向きを表す面電流密度 J_s [A/m] で記述



$$I = \int_C J_s \cdot a_n dl \quad (7.1)$$

(3) 体積電流分布: 3次元領域内に電流が存在する分布
単位面積当りの電流とその向きを表す電流密度 J [A/m²] で記述



$$I = \iint_S J \cdot dS \quad (7.2)$$

7.1.3 ビオ・サバールの法則とその数学的表現

■導線電流による磁界に関する実験法則（ビオとサバール）

- ①微小磁界の大きさは、電流素片の大きさに比例する。

$$|Id\mathbf{r}'|$$

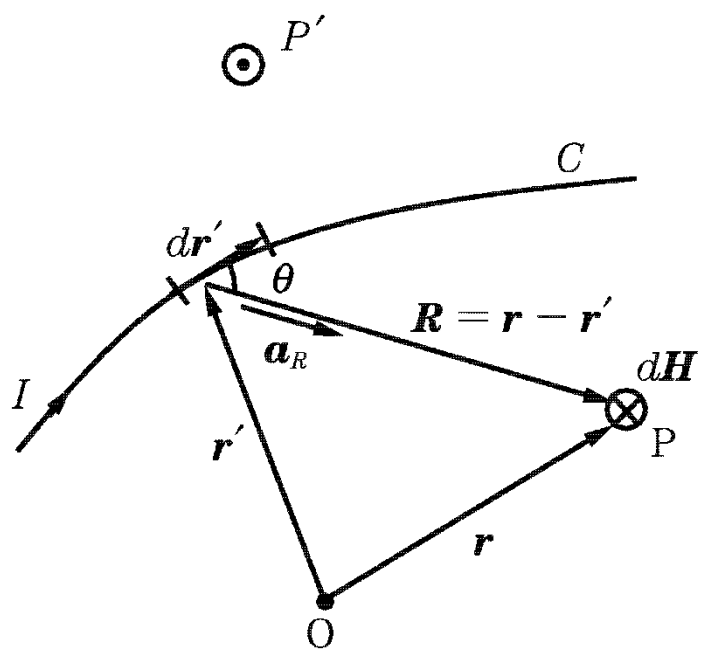
- ②微小磁界の大きさは、観測点と電流素片との間の距離の2乗に反比例する。

$$1/R^2$$

- ③微小磁界の大きさは、電流素片の点において曲線 C の接線と観測点に引いた直線とのなす角 θ の正弦 $\sin\theta$ に比例する

$$\sin\theta = \frac{|Id\mathbf{r}' \times \mathbf{a}_R|}{|Id\mathbf{r}'|}$$

- ④微小磁界の向きは、電流素片および電流素片から観測点までの直線に垂直である。図の点 P では紙面の表から裏の方向へ、点 P' では紙面の裏から表の方向を向く。



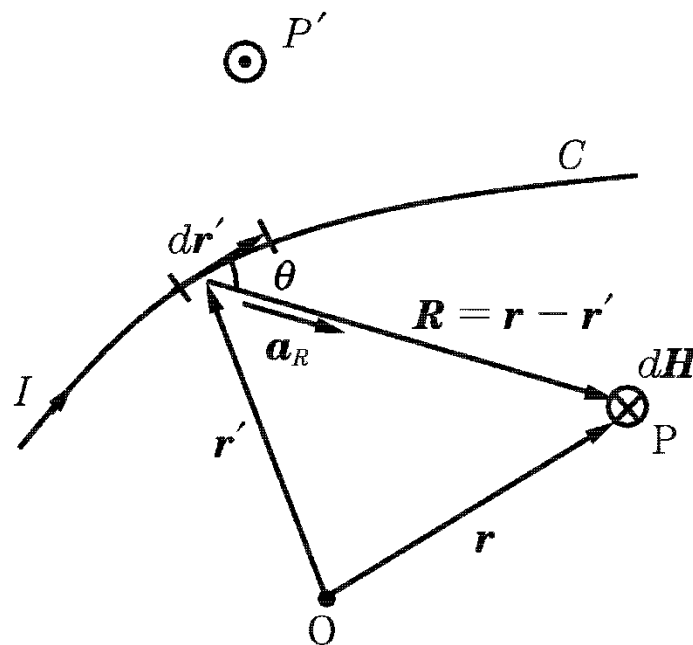
$$\frac{Id\mathbf{r}' \times \mathbf{a}_R}{|Id\mathbf{r}' \times \mathbf{a}_R|}$$

ビオ・サバルの法則（線素）

$$d\mathbf{H} = \boxed{k} |I d\mathbf{r}'| \frac{1}{R^2} \frac{|I d\mathbf{r}' \times \mathbf{a}_R|}{|I d\mathbf{r}'|} \frac{I d\mathbf{r}' \times \mathbf{a}_R}{|I d\mathbf{r}' \times \mathbf{a}_R|}$$

$k = 1/4\pi$

$$\boxed{= \frac{I(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{I(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}} \quad (7.3)$$



電流素片の等価性

$$\boxed{I(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = J_s(\mathbf{r}') dS' = J(\mathbf{r}') dv'} \quad (7.4)$$

ビオ・サバルの法則（面素・体積素）

（面素）

$$d\mathbf{H} = \frac{J_s(\mathbf{r}') dS' \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{J_s(\mathbf{r}') dS' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (7.5)$$

（体積素）

$$d\mathbf{H} = \frac{J(\mathbf{r}') dv' \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{J(\mathbf{r}') dv' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (7.6)$$

7.1.4 ビオ・サバールの法則の積分形

【基本】電流素片による磁界の重ね合わせ(⇒積分)と考える

(1) 線電流分布による磁界

曲線 C に沿って流れる電流による磁界

$$\mathbf{H} = \oint_C \frac{I(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \oint_C \frac{I(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (7.7)$$

(2) 面電流分布による磁界

曲面 S 上を流れる電流による磁界

$$\mathbf{H} = \iint_S \frac{\mathbf{J}_S(\mathbf{r}') dS' \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \iint_S \frac{\mathbf{J}_S(\mathbf{r}') dS' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (7.8)$$

(3) 体積電流分布による磁界

領域 v 内を流れる電流による磁界

$$\mathbf{H} = \iiint_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \iiint_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (7.9)$$

例題7.1 z 軸に沿って $+z$ 方向に一様な電流 I が $z = -\infty$ から $z = \infty$ まで流れるときの磁界を計算せよ。

【考え方】 ビオ・サバールの法則を適用するために必要となる量を計算する

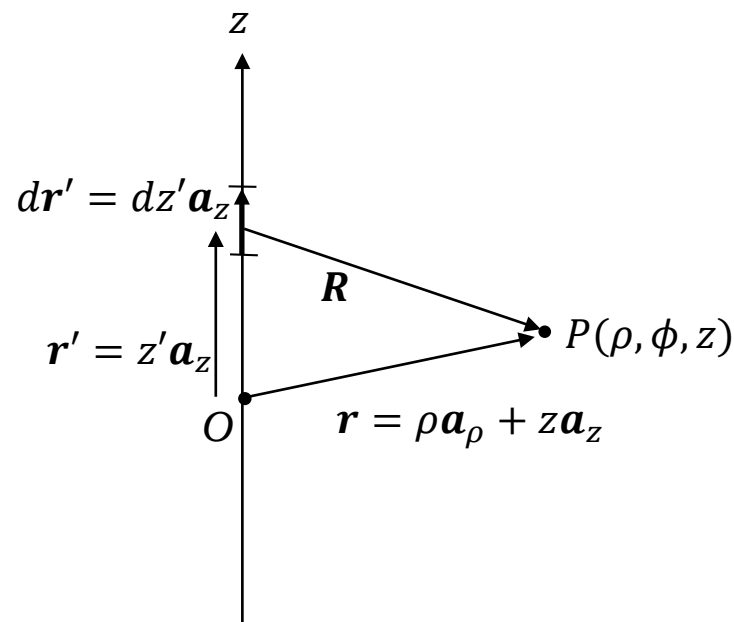
- [1] 観測点の位置ベクトル $\mathbf{r}$, 電流素片の位置ベクトル $\mathbf{r}'$, それらの差(ベクトル) $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ と大きさ(距離) $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ を計算する
- [2] 電流素片 ($I(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$, $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')dS'$, $\mathbf{J}(\mathbf{r}')dv'$) に含まれる線素 $d\mathbf{r}'$, 面素 dS' , 体積素 dv' を具体的に書き下す

【解答】 (解答文は教科書参照)

$$\begin{aligned}
 [1] \quad \mathbf{r} &= \rho \mathbf{a}_\rho + z \mathbf{a}_z \\
 \mathbf{r}' &= z' \mathbf{a}_z \quad (\because x' = y' = 0 \text{ on } z \text{ axis}) \\
 \mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho \mathbf{a}_\rho + (z - z') \mathbf{a}_z \\
 R &= |\mathbf{R}| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}
 \end{aligned}$$

$$[2] \quad I d\mathbf{r}' = I dz' \mathbf{a}_z$$

これらの結果をビオ・サバールの法則(線素)に代入する。



電流素片による微小磁界

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{I dz' \mathbf{a}_z \times \{\rho \mathbf{a}_\rho + (z - z') \mathbf{a}_z\}}{4\pi \{\rho^2 + (z - z')^2\}^{3/2}} = \frac{I \rho dz'}{4\pi \{\rho^2 + (z - z')^2\}^{3/2}} \mathbf{a}_\phi$$

電流は $z' = -\infty$ から $z' = +\infty$ まで分布しているので、この範囲で積分する。

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \rho dz'}{4\pi \{\rho^2 + (z - z')^2\}^{3/2}} \mathbf{a}_\phi = \frac{I \rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{I \rho}{4\pi} \left[\frac{t}{\rho^2 \sqrt{t^2 + \rho^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_\phi = \frac{I}{2\pi \rho} \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

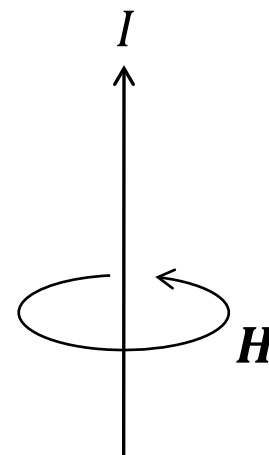
ここで、 $t = -(z - z')$ と置換し、次の積分公式を利用した。

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C \quad (\text{C.1})$$

【公式】無限長一様電流による磁界 (要暗記！)

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi \rho} \mathbf{a}_\phi$$

(7.10)

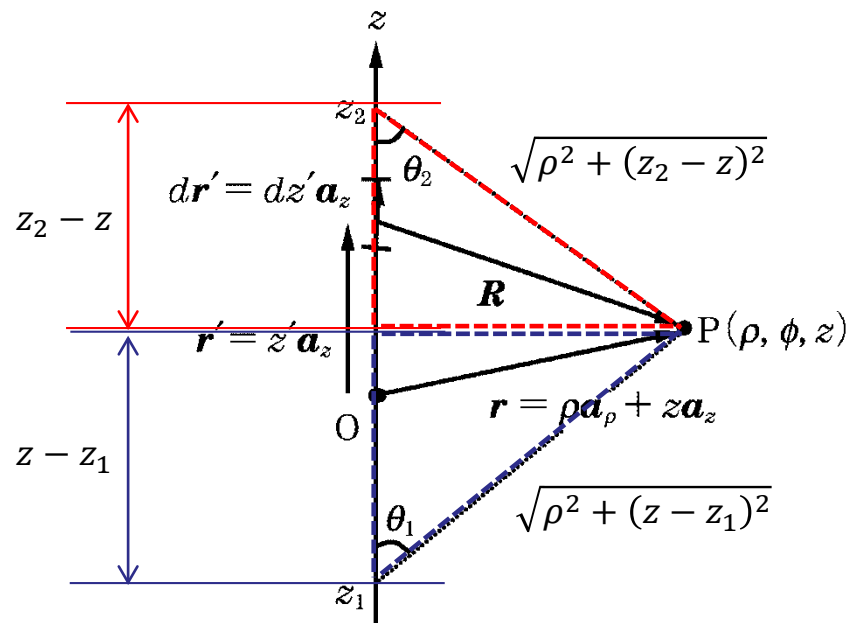


磁界の向きはアンペアの
右ねじの法則に同じ

例題7.2 z 軸に沿って $+z$ 方向に一様な電流 I が $z = z_1$ から $z = z_2$ まで流れるときの磁界を計算せよ。

【解答】 積分範囲が変更になる点を除いて、置換積分を含めて、例題7.1に同じ

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{I \rho dz'}{4\pi \{\rho^2 + (z - z')^2\}^{3/2}} \mathbf{a}_\phi = \frac{I \rho}{4\pi} \int_{z_1 - z}^{z_2 - z} \frac{dt}{(\rho^2 + t^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\phi \\
 &= \frac{I \rho}{4\pi} \left[\frac{t}{\rho^2 \sqrt{t^2 + \rho^2}} \right]_{z_1 - z}^{z_2 - z} \mathbf{a}_\phi = \frac{I}{4\pi \rho} \left[\frac{z - z_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2}} + \frac{z_2 - z}{\sqrt{\rho^2 + (z_2 - z)^2}} \right] \mathbf{a}_\phi \\
 &= \frac{I}{4\pi \rho} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \mathbf{a}_\phi \quad (7.11)
 \end{aligned}$$



例題7.3 xy 平面上に、中心が原点で、半径が a の円形ループ導線を置く。
この導線に沿って一様な電流 I を流すとき、円形ループ中心軸における磁界を計算せよ。ただし、電流の向きは、 z 軸の正の向きに右手の親指の向きを合わせるとき、右手の残りの四指が指す向きとする。

【解答】 (解答文は教科書参照)

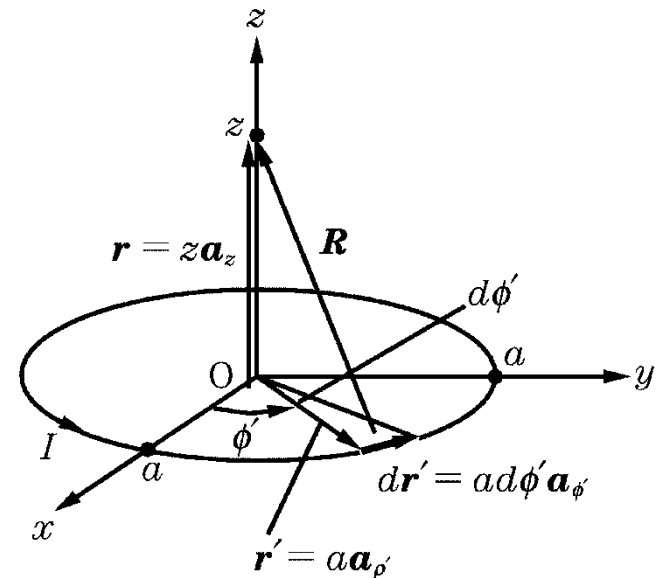
$$\begin{aligned}
 [1] \quad & \mathbf{r} = z\mathbf{a}_z \\
 & \mathbf{r}' = a\mathbf{a}_{\rho'} \\
 & \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_{\rho'} \\
 & R = |\mathbf{R}| = \sqrt{z^2 + a^2}
 \end{aligned}$$

$$[2] \quad I d\mathbf{r}' = I a d\phi' \mathbf{a}_{\phi'}$$

これらの結果をビオ・サバールの法則(線素)に代入すると、電流素片による微小磁界は

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{I a d\phi' \mathbf{a}_{\phi'} \times (z\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_{\rho'})}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{I a (z\mathbf{a}_{\rho'} + a\mathbf{a}_z)}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi'$$

と与えられる。



電流は $\phi' = 0$ から $\phi' = 2\pi$ まで分布しているので, この範囲で積分する。

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{Ia}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z\mathbf{a}_{\rho'} + a\mathbf{a}_z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi' = \frac{Iaz}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_{\rho'} d\phi' + \frac{Ia^2}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{a}_z \\ &= \frac{Ia^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z \quad \quad \quad \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathbf{a}_{\rho'} d\phi'}_{=0} \end{aligned}$$

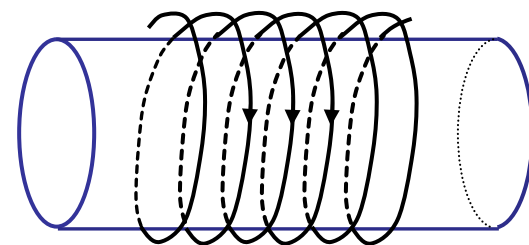
特に, 円形ループの中心 ($z = 0$) では

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2a} \mathbf{a}_z \quad (7.12)$$

となる (⇒高校の教科書で見かける公式)

ソレノイドの定義

中空の筒状の表面に導線をらせん状に
一様に密に巻いたもの



※ ソレノイドで注目すべき構造パラメータは
巻き数 N あるいは単位長さ当りの巻き数 $n = N/L$ (L はソレノイドの全長) である

例題7.4改 z 軸を中心軸とする無限長の円形ソレノイドを考える。ソレノイドに流す電流を I とし、円の半径を a とする。このとき、ソレノイドの中心軸における磁界を計算せよ。

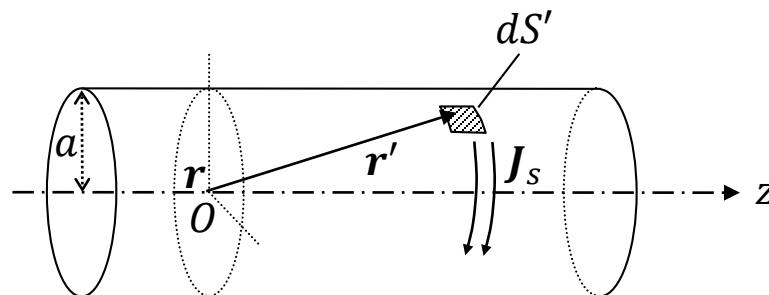
【解答】(要点のみ)

[1] $\mathbf{r} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_{\rho'} + z'\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a\mathbf{a}_{\rho'} - z'\mathbf{a}_z$$

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{a^2 + z'^2}$$



$$[2] \quad J_s dS' = (nI\mathbf{a}_{\phi'})(ad\phi'dz') = nIad\phi'dz'\mathbf{a}_{\phi'}$$

ここで

$$\begin{aligned} J_s dS' \times \mathbf{R} &= (nIad\phi'dz'\mathbf{a}_{\phi'}) \times (-a\mathbf{a}_{\rho'} - z'\mathbf{a}_z) \\ &= nIa(a\mathbf{a}_z - z'\mathbf{a}_{\rho'}) d\phi'dz' \end{aligned}$$

となるので、ビオ・サバールの法則(面素)より、電流素片による微小磁界は

$$d\mathbf{H} = \frac{J_s dS' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{nIa(a\mathbf{a}_z - z'\mathbf{a}_{\rho'})}{4\pi(a^2 + z'^2)^{3/2}} d\phi'dz'$$

と与えられる

電流が流れる範囲 $0 \leq \phi' < 2\pi$, $-\infty < z' < \infty$ で積分する

$$\begin{aligned}
 \boxed{H} &= \frac{nIa}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\mathbf{a}_z - z'\mathbf{a}_{\rho'}}{(z'^2 + a^2)^{3/2}} dz' d\phi' \\
 &= \frac{nIa^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(z'^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z - \frac{nIa}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z' dz'}{(z'^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_{\rho'} d\phi' \\
 &\quad \text{偶関数} \qquad \qquad \qquad \text{奇関数}
 \end{aligned}$$

$$= nIa^2 \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(z'^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z = nIa^2 \left[\frac{z'}{a^2 \sqrt{z'^2 + a^2}} \right]_0^{\infty} \mathbf{a}_z \boxed{= nI\mathbf{a}_z}$$

上記は中心軸上での磁界を計算したが、例題7.4の結果からわかるように、一般に、無限長のソレノイドに面電流密度 $J_s = J_{s0}\mathbf{a}_{\phi}$ の電流を流すとき、ソレノイド内外における磁界は

$$\boxed{H = \begin{cases} J_{s0}\mathbf{a}_z & (\text{ソレノイド内部}) \\ \mathbf{0} & (\text{ソレノイド外部}) \end{cases}} \quad (7.14)$$

となる。ただし、 z 軸をソレノイドの中心軸とする。このように、ソレノイドの内側では、その位置によらず、中心軸を向いた一定の大きさの磁界が生じ、ソレノイドの外部では磁界が生じない。

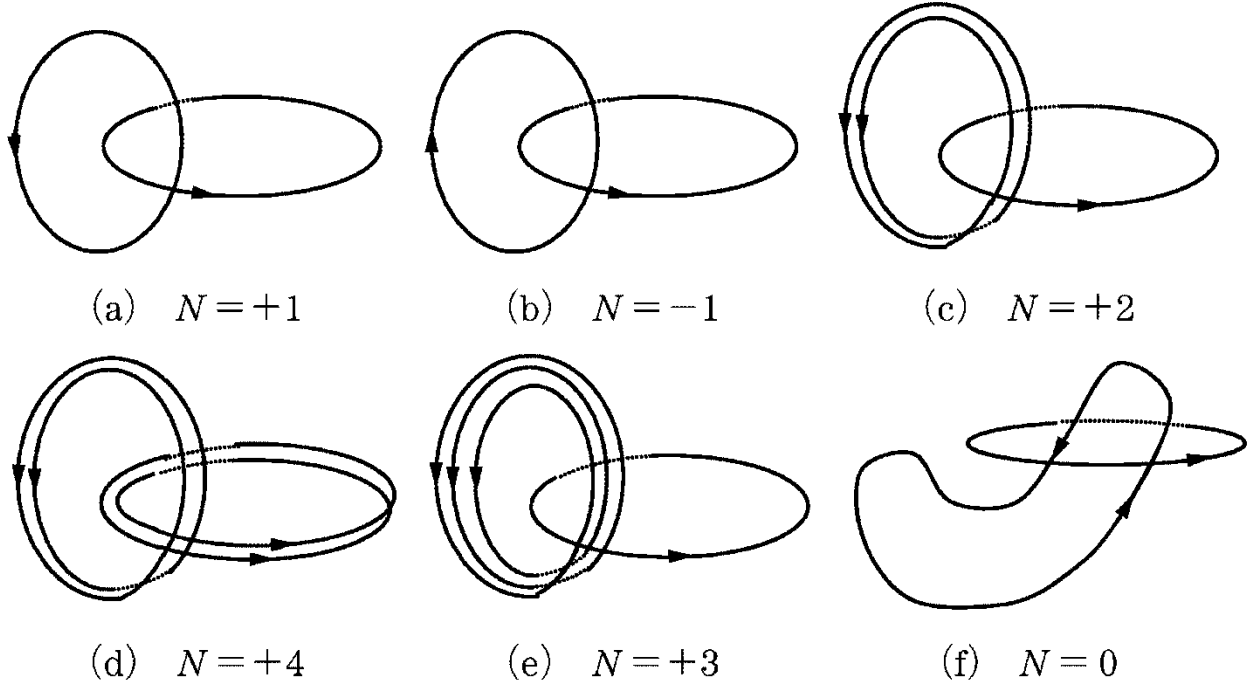
7.2 アンペアの周回路の法則

7.2.1 鎖交

鎖交：二つの閉曲線が絡み合うこと（コイルの巻き数を一般化した概念）

鎖交数 N の定義：

- ◎ 絡み合いが右ねじの関係で一回あるとき、鎖交数を $N = +1$ とする。
- ◎ 絡み合いが左ねじの関係で一回あるとき、鎖交数は $N = -1$ とする。



7.2.2 アンペアの周回路の法則の導出

電流 I が z 軸に沿って一様に流れるとき, xy 平面に存在する
閉曲線 C に沿っての磁界 H に関する線積分

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot \rho \mathbf{a}_\phi d\phi = \frac{I}{2\pi} \int_C d\phi$$

(a) 閉曲線 C が z 軸を囲むとき

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = I$$

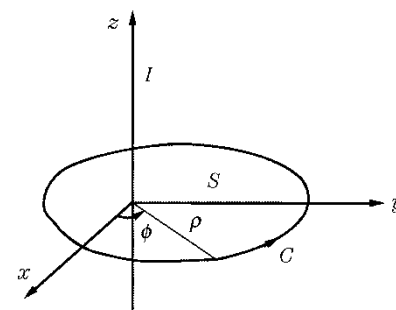
(b) 閉曲線 C が z 軸を囲まないとき

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{I}{2\pi} \left\{ \int_{A(C_1)}^B d\phi + \int_{B(C_2)}^A d\phi \right\} \\ &= \frac{I}{2\pi} \left\{ \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_1} d\phi \right\} = 0 \end{aligned}$$

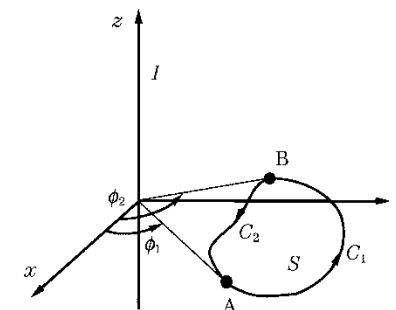
アンペアの周回路の法則

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_{\text{net through } S} \quad (7.15)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.16)$$



(a) 電流 I が曲面 S を通過する場合



(b) 電流 I が曲面 S を通過しない場合

7.2.3 アンペアの周回路の法則の適用

(1) 適用の原則

次の二つの条件を満たすように閉曲線 C を選ぶと、面積分が簡単になる

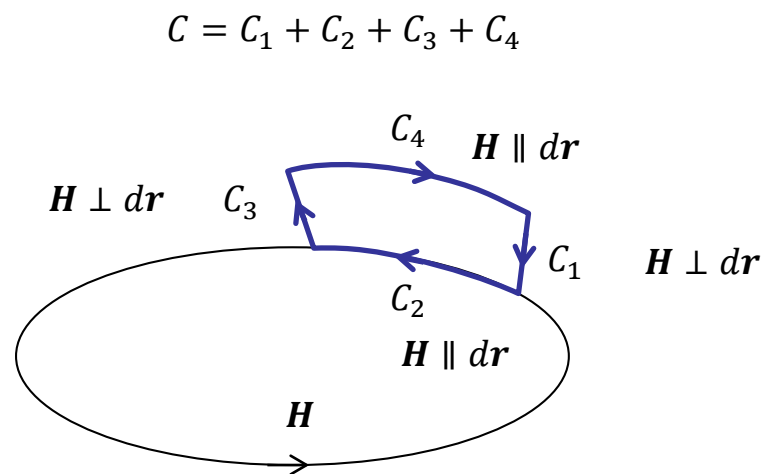
① $H \parallel dr$ or $H \perp dr$

– $H \parallel dr$ のとき

$$\begin{aligned} H \cdot dr &= H \cdot (a_t dl) \\ &= (H \cdot a_t) dl = H_t dl \end{aligned}$$

– $H \perp dr$ のとき

$$H \cdot dr = 0$$



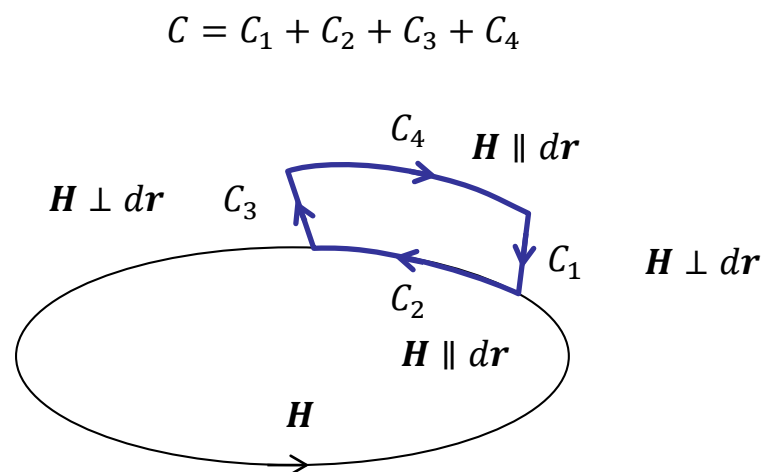
② 磁界 H に平行な閉曲線 C の部分 C_i において H_t が一定値 H_i となる このとき、アンペアの周回路の法則(7.15)の面積分は

$$\oint_C H \cdot dr = \sum_{i=1}^m \int_{C_i} H_t dl = \sum_{i=1}^m H_i \int_{C_i} dl = \sum_{i=1}^m H_i \times (C_i \text{ の長さ})$$

となる。

式(7.15)はつぎのように簡単化される

$$\sum_{i=1}^m H_i \times (C_i \text{の長さ}) = I_{\text{net through } S} \quad (7.17)$$

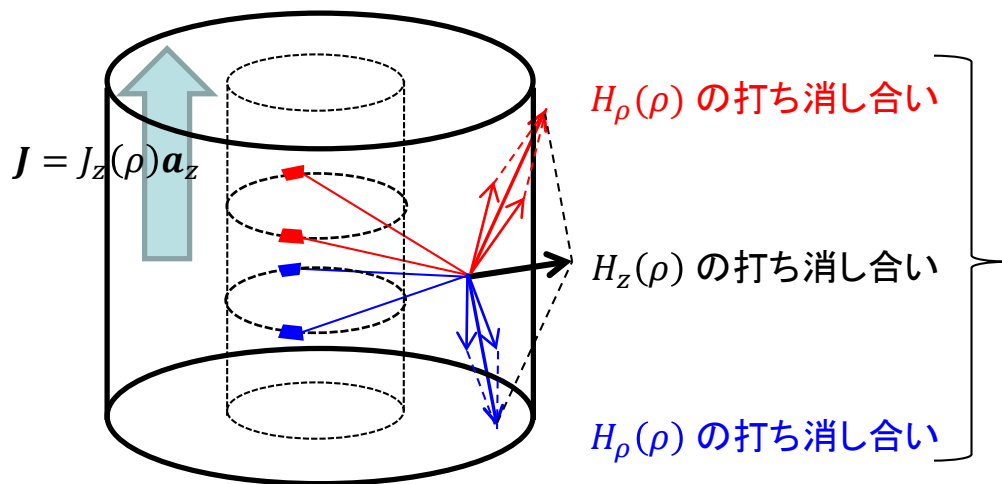


※ 与えられた電流分布の対称性に着目し、アンペアの右ねじの法則もしくは
ビオ・サバールの法則によって磁界の向きについて予測する必要がある

(2) 軸対称電流分布による磁界

円筒座標系 (ρ, ϕ, z) に対して, 電流密度は ρ のみの関数 $\mathbf{J} = J_z(\rho)\mathbf{a}_z$ である。

$$\rightarrow \mathbf{H} = H_\rho(\rho)\mathbf{a}_\rho + H_\phi(\rho)\mathbf{a}_\phi + H_z(\rho)\mathbf{a}_z$$



$$\mathbf{H} = H_\phi(\rho)\mathbf{a}_\phi$$

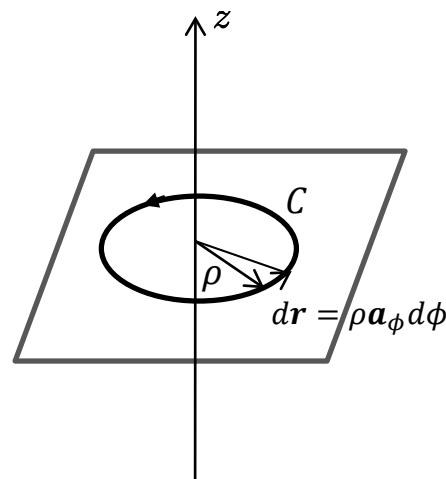
閉曲線 C : xy 平面に平行で, z 軸に中心を持つ半径 ρ の円周

この円周上では $\mathbf{H} = H_\phi(\rho)\mathbf{a}_\phi \parallel d\mathbf{r} = \rho\mathbf{a}_\phi d\phi$ の関係が成り立ち, かつ, $\rho = \text{一定}$ のとき, $H_\phi(\rho) = \text{一定}$ である。円周の長さが $2\pi\rho$ であることより

$$H_\phi \cdot 2\pi\rho = I_{\text{net through } S} \quad (7.18)$$

の関係が得られる。これから

$$\mathbf{H} = \frac{I_{\text{net through } S}}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi = \frac{1}{2\pi\rho} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\rho J_z(\rho') \rho' d\rho' d\phi' \right) \mathbf{a}_\phi = \left(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho J_z(\rho') \rho' d\rho' \right) \mathbf{a}_\phi \quad (7.19)$$



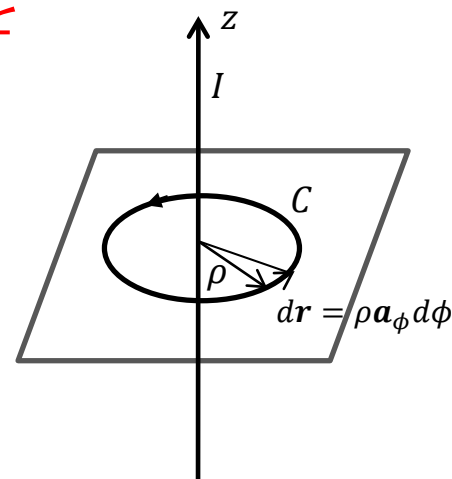
例題7.5 アンペアの周回路の法則を利用して、 z 軸に沿って $+z$ 方向に一様な電流 I が $z = -\infty$ から $z = \infty$ まで流れるときの磁界を計算せよ。

【解答】 閉曲線 C として、 xy 平面に平行で、 z 軸に中心を持つ半径 ρ の円周を選ぶ。この閉曲線 C に囲まれた曲面を通過する電流は $I_{\text{net through } S} = I$ であるから、簡単化されたアンペアの周回路の法則(7.18)より

$$H_{\phi} \cdot 2\pi\rho = I_{\text{net through } S} = I$$

これから

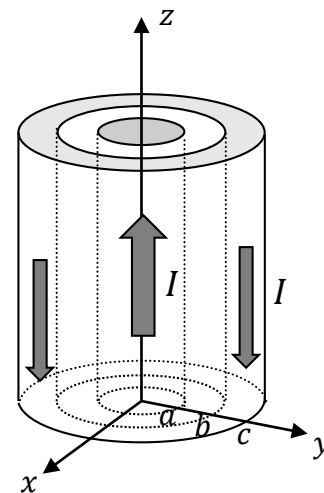
$$\mathbf{H} = H_{\phi} \mathbf{a}_{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_{\phi}$$



※(7.18)の左辺は次のように直接線積分を計算してもよい

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} H_{\phi}(\rho) \mathbf{a}_{\phi} \cdot \rho \mathbf{a}_{\phi} d\phi = H_{\phi}(\rho) \rho \int_0^{2\pi} d\phi = H_{\phi} \cdot 2\pi\rho$$

例題7.6 アンペアの周回路の法則を利用して、同軸ケーブル断面内外の磁界を計算せよ。ただし、内導体の半径を a 、外導体の内径を b 、外径を c とし、電流は導体断面を一様に流れるものとする。

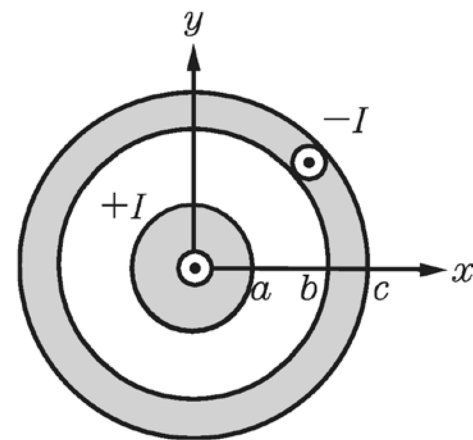


【解答】 内導体に I ，外導体に $-I$ の電流を流す。

内導体および外導体の断面において電流密度

$\mathbf{J} = J_z(\rho)\mathbf{a}_z$ は一定である。

$$J_z = \begin{cases} I/\pi a^2 & \text{for } \rho < a \quad (\text{内導体}) \\ -I/\pi(c^2 - b^2) & \text{for } b < \rho < c \quad (\text{外導体}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



閉曲線 C として, xy 平面に平行で, z 軸に中心を持つ半径 ρ の円周を選ぶ。

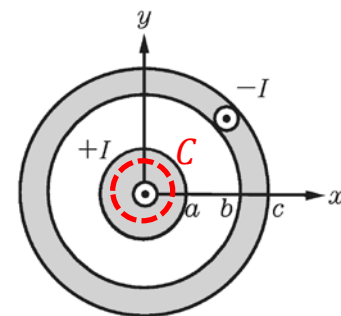
閉曲線 C に囲まれた曲面 S を通過する電流を求める (ρ について場合分け)

$$I_{\text{net through } S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}' = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho J_z(\rho') \rho' d\rho' d\phi' = 2\pi \int_0^\rho J_z(\rho') \rho' d\rho'$$

a) $\rho < a$ のとき (内導体の内部に閉曲線 C が含まれるとき)

$$H_\phi \cdot 2\pi\rho = I_{\text{net through } S} = 2\pi \int_0^\rho \frac{I}{\pi a^2} \rho' d\rho' = \frac{\rho^2}{a^2} I$$

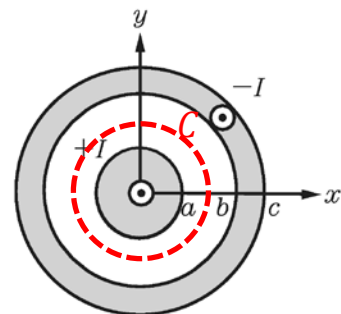
$$\therefore \mathbf{H} = \frac{\rho^2}{2\pi\rho} \frac{I}{a^2} \mathbf{a}_\phi = \frac{\rho I}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi$$



b) $a < \rho < b$ のとき (内外導体の間に閉曲線 C が含まれるとき)

$$H_\phi \cdot 2\pi\rho = I_{\text{net through } S} = 2\pi \int_0^a \frac{I}{\pi a^2} \rho' d\rho' = I$$

$$\therefore \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

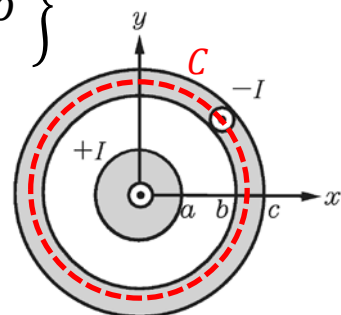


c) $b < \rho < c$ のとき (外導体内部に閉曲線 C が含まれるとき)

$$H_\phi \cdot 2\pi\rho = I_{\text{net through } S} = 2\pi \left\{ \int_0^a \frac{I}{\pi a^2} \rho' d\rho' + \int_b^\rho \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)} \rho' d\rho' \right\}$$

$$= I - \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} I = \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} I$$

$$\therefore \mathbf{H} = \frac{\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \mathbf{a}_\phi$$

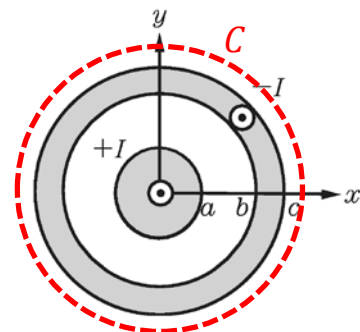


d) $\rho > c$ のとき (閉曲線 C が同軸ケーブルの外部にあるとき)

$$H_\phi \cdot 2\pi\rho = I_{\text{net through } S}$$

$$= 2\pi \left\{ \int_0^a \frac{I}{\pi a^2} \rho' d\rho' + \int_b^c \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)} \rho' d\rho' \right\} = I - I = 0$$

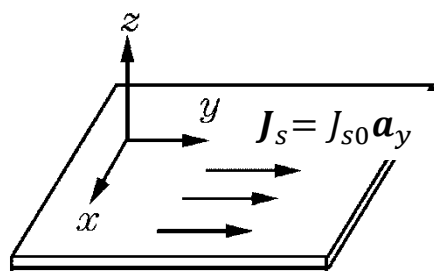
$$\therefore \mathbf{H} = \frac{0}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi = \mathbf{0} \quad (\text{磁気遮蔽効果})$$



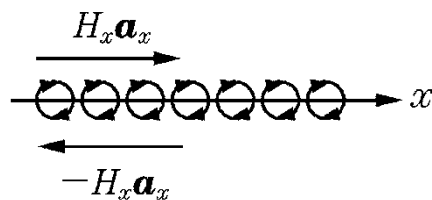
(3) 軸対称以外の電流分布による磁界

(3-1) 平面状の面電流(シート電流)による磁界

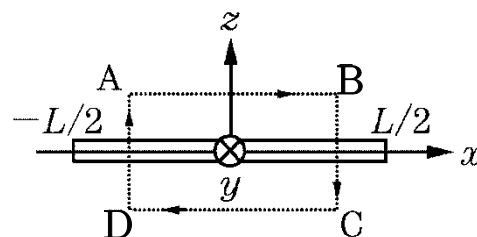
例題7.7 アンペアの周回路の法則を利用して, xy 平面上に流れる面電流密度 $J_s = J_{s0} \mathbf{a}_y$ の電流による磁界を計算せよ。ただし, J_{s0} は定数とする。



(a) 全体図



(b) 面を多数の導線に分割

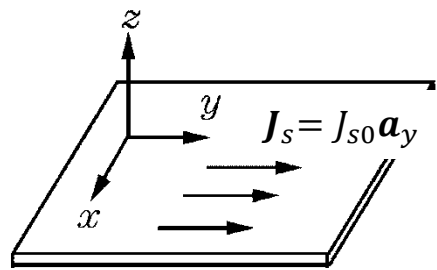


(c) 断面図

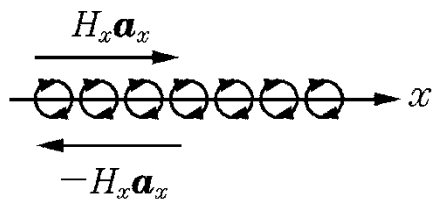
【解答】 面電流を多数の y 軸に平行な直線電流に置き換え, アンペアの右ねじの法則を適用する。図(b)に示すように, 直線電流はその方位角方向に磁界をつくるので, 全体として面電流に平行な面では, $z > 0$ において磁界は x 方向を向き, $z < 0$ において $-x$ 方向を向く。また, 面電流に垂直な面では, 磁界は隣り合う直線電流によって打ち消される。このように, 面電流による磁界は

$$\mathbf{H} = H_x(z) \mathbf{a}_x$$

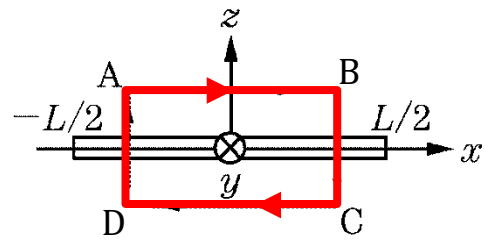
と与えられる。ただし, $H_x(-z) = -H_x(z)$ とする。



(a) 全体図



(b) 面を多数の導線に分割



(c) 断面図

図(c)に示す閉曲線ABCDに対して，簡単化されたアンペアの周回路の法則(7.17)を適用する。

辺AB, 辺CD上において $H \parallel dr$

辺BC, 辺DA上において $H \perp dr$ であることに注意して

$$H_x(z)L + \{-H_x(-z)\}L = I_{\text{net through } S} = J_{s0}L$$

$$\therefore H_x(z) = \frac{J_{s0}}{2}$$

$$\therefore H = \begin{cases} \frac{J_{s0}}{2} a_x & \text{for } z > 0 \\ -\frac{J_{s0}}{2} a_x & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

※ シートに直交する向きに，一様磁界(定ベクトル)が生じていることは興味深い。

$$H = \frac{J_{s0}}{2} a_x$$

$$J_s = J_{s0} a_y$$

$$H = \frac{J_{s0}}{2} (-a_x)$$

(3-2) 円形ソレノイドに流れる面電流による磁界

例題7.8 中心軸を z 軸とするような無限長円形ソレノイドに面電流密度 $J_s = J_{s0} \mathbf{a}_\phi$ が流れるとき、アンペアの周回路の法則を利用して、ソレノイド内外の磁界を計算せよ。ただし、 J_{s0} は定数とし、 a をソレノイド断面の円の半径とする。

【解答】 軸対称性、無限長であることから、磁界は ρ のみの関数であり、かつ、電流の向きに着目し、アンペアの右ねじの法則を用いると

$$\mathbf{H} = H_z(\rho) \mathbf{a}_z$$

となる。閉曲線として図に示す長方形を選ぶ。

a) 閉曲線DCC'D'に対して考える。

辺DC, 辺C'D'上において $\mathbf{H} \parallel d\mathbf{r}$

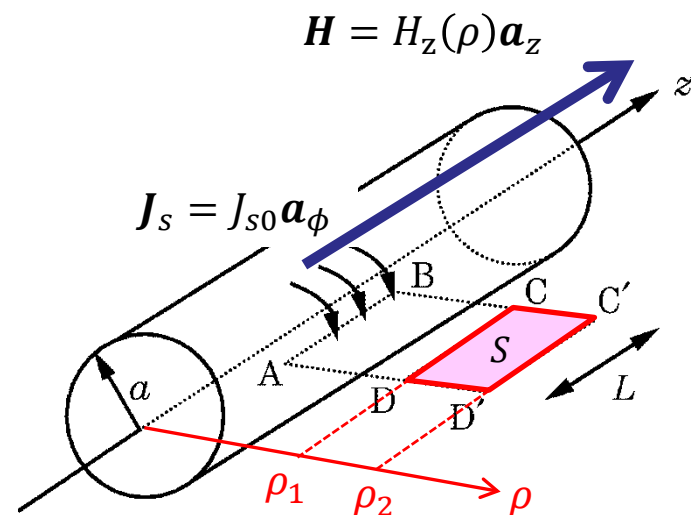
辺DD', 辺C'C上において $\mathbf{H} \perp d\mathbf{r}$ であることに注意して

$$\underbrace{H_z(\rho_1)L}_{\text{辺DC}} + \underbrace{\{-H_z(\rho_2)\}L}_{\text{辺C'D'}} = I_{\text{net through } S} = 0$$



$$H_z(\rho_1) = H_z(\rho_2) = H_z(\infty) = 0$$

$$\therefore \mathbf{H}(\rho) = \mathbf{0} \quad \text{for } \rho > a$$



b) 閉曲線ABCDに対して考える。

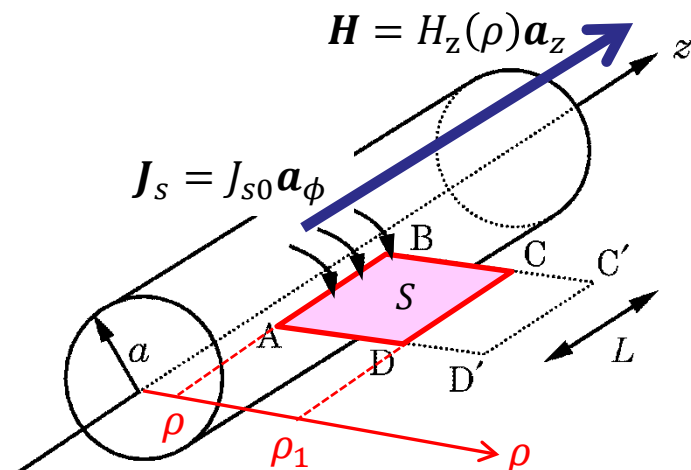
辺AB, 辺CD上において $\mathbf{H} \parallel d\mathbf{r}$

辺BC, 辺DA上において $\mathbf{H} \perp d\mathbf{r}$ であることに注意して

$$\underbrace{H_z(\rho)L}_{\text{辺AB}} + \underbrace{\{-H_z(\rho_1)\}L}_{\text{辺CD}} = I_{\text{net through } S} = J_{s0}L$$

$$\therefore H_z(\rho) = J_{s0} + H_z(\rho_1) = J_{s0}$$

$$\therefore \mathbf{H}(\rho) = J_{s0} \mathbf{a}_z \quad \text{for } \rho < a$$



一般に、断面形状によらずソレノイド内部での磁界は一定となる。

(3-3) 円形トロイダルコイルに流れる電流による磁界

例題7.9 断面が円形であるようなトロイダルコイルによる磁界を求めよ。コイルに流れる電流を I とし、巻き数を N とする。また、トロイダルコイルの中心から断面の中心までの距離を a とし、断面の半径を b とするとき、 $a \gg b$ であることを仮定せよ。

【解答】 図に示す座標系を設定する。電流の向きに対してアンペアの右ねじの法則を用いると、磁界は ϕ 成分のみであり、

$$\mathbf{H} = H_\phi(\rho, z)\mathbf{a}_\phi$$

の形となると予測される。閉曲線 C として、 xy 平面に平行で、 z 軸に中心軸を持つような半径 ρ の円周を選ぶ。このとき、 $d\mathbf{r} = \rho\mathbf{a}_\phi d\phi$ であるから、 $\mathbf{H} \parallel d\mathbf{r}$ の関係が成り立つ。

したがって、簡単化されたアンペアの周回路の法則(7.17)より

$$H_\phi \cdot 2\pi\rho = I_{\text{net through } S}$$

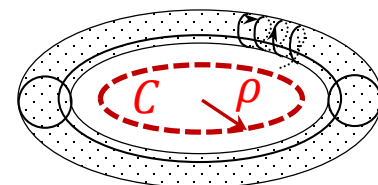
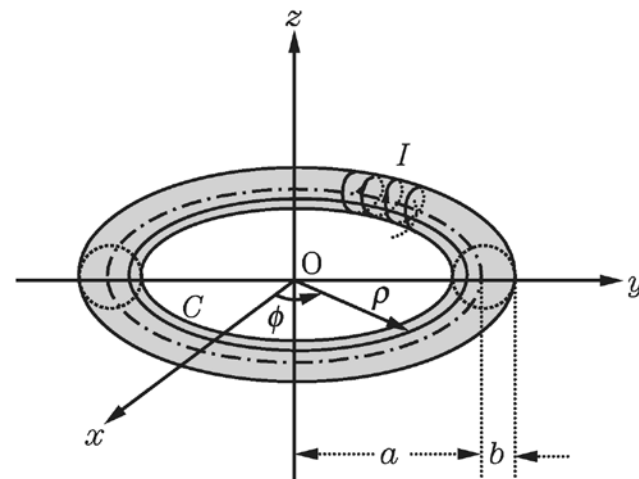
の関係が得られる。ここで、閉曲線 C に囲まれる曲面を S とする。

a) 閉曲線 C がコイルの内径よりも内側にあるとき、曲面 S と鎖交する電流は存在しないので、

$I_{\text{net through } S} = 0$ となる。すなわち、磁界は

$$\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

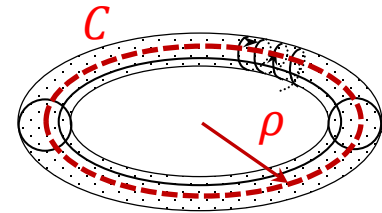
と与えられる。



- b) 閉曲線 C がコイルの内側に含まれるとき、曲面 S と鎖交する電流はコイルの内側の側面を流れる電流であるから、巻き数 N が鎖交数となり、 $I_{\text{net through } S} = NI$ となる。すなわち、磁界は

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

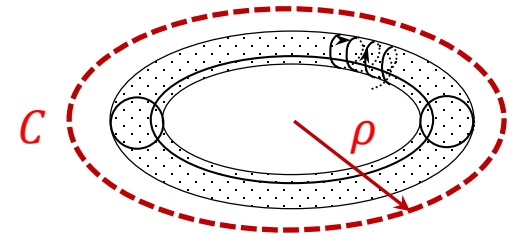
と与えられる。



- c) 閉曲線 C がコイルの外径よりも外側にあるとき、曲面 S と鎖交する電流はコイルの内側の側面および外側の側面を流れる電流であり、それぞれ巻き数 N だけ曲面と交差するが、鎖交数は $N + (-N) = 0$ となるので、 $I_{\text{net through } S} = 0$ となる。すなわち、磁界は

$$\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

と与えられる。



以上をまとめると、コイルの内側では $\mathbf{H} = (NI/2\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$ となり、外側では $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ となる。一般に、この結果は任意の断面形状に対して成り立つ。

7.3 回転とストークスの定理

7.3.1 回転

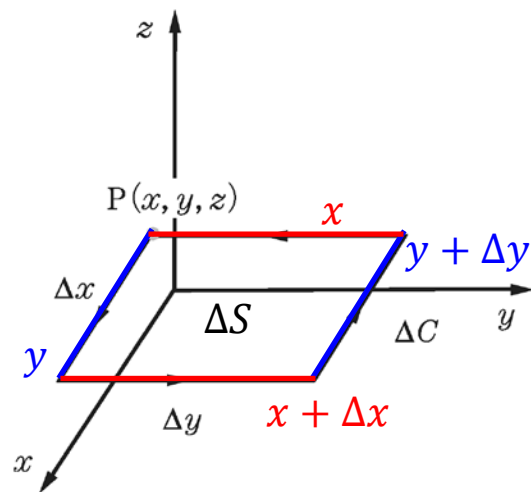
(1) 長方形の微小閉曲線に関するアンペアの周回路の法則

長方形の積分路 ΔC に関する線積分を4辺に分割して評価する。

$$\oint_{\Delta C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_x^{\boxed{x+\Delta x}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} + \int_{y+\Delta y}^y \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \\ + \int_{x+\Delta x}^x \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} + \int_y^{y+\Delta y} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$$

各辺は十分に短いので、各辺において磁界 $\mathbf{H}$ は定ベクトルとみなせる。つまり、 $\mathbf{H}$ は線積分の外に出せる。例えば

$$\boxed{\int_x^{x+\Delta x} + \int_{x+\Delta x}^x} \approx \mathbf{H}(x, y, z) \cdot \int_x^{x+\Delta x} d\mathbf{r} + \mathbf{H}(x + \Delta x, y, z) \cdot \int_{x+\Delta x}^x d\mathbf{r} \\ = \mathbf{H}(x, y, z) \cdot (-\Delta y \mathbf{a}_y) + \mathbf{H}(x + \Delta x, y, z) \cdot (\Delta y \mathbf{a}_y) \\ = \frac{H_y(x + \Delta x, y, z) - H_y(x, y, z)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \approx \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta S$$



同様に

$$\begin{aligned}
 \boxed{\int_{y+\Delta y} + \int_y} &\approx \mathbf{H}(x, y + \Delta y, z) \cdot \int_{y+\Delta y} d\mathbf{r} + \mathbf{H}(x, y, z) \cdot \int_y d\mathbf{r} \\
 &= \mathbf{H}(x, y + \Delta y, z) \cdot (-\Delta x \mathbf{a}_x) + \mathbf{H}(x, y, z) \cdot (\Delta x \mathbf{a}_x) \\
 &= -\frac{H_x(x, y + \Delta y, z) - H_x(x, y, z)}{\Delta y} \Delta x \Delta y \approx -\frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta S
 \end{aligned}$$

長方形経路 ΔC に対するアンペアの周回路の法則 (7.15) は

$$\oint_{\Delta C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta S = \Delta I = J_z \Delta S \quad (7.20)$$

となり, $\Delta S \rightarrow 0$ の極限で

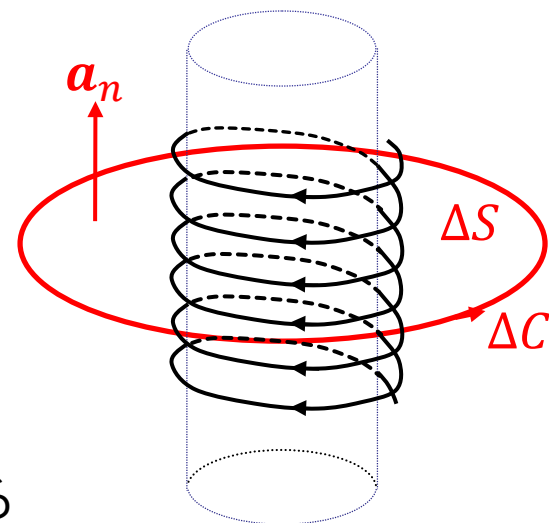
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = J_z \quad (7.21)$$

(2) 回転(rotation, curl)の定義【法線成分】

$$(\nabla \times \mathbf{A})_n = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.22)$$

ナブラ クロス エイ あるいは ローテーション エイと読む

単位面積あたりのベクトルの回転量(渦の量)に対応する



(3) 回転の成分表示

(3-a) 直角座標系

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (7.23a)$$

(3-b) 円筒座標系

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z \\
 &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \quad (7.23b)
 \end{aligned}$$

(3-c) 球座標系

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} \quad (7.23c)
 \end{aligned}$$

(4) アンペアの周回路の法則の微分形

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{H})_x &= J_x \\ (\nabla \times \mathbf{H})_y &= J_y \\ (\nabla \times \mathbf{H})_z &= J_z \end{aligned} \right\} \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \quad (7.24)$$

磁界の渦の大きさと向きはその点における電流密度 $\mathbf{J}$ によって決定する

例題7.10 z 軸に沿って一様に流れる電流 I による磁界 $\mathbf{H}$ の回転を計算せよ。
ただし, z 軸は除外する。

【解答】 例題7.1の結果から, $\rho \neq 0$ において $\mathbf{H} = H_\rho \mathbf{a}_\rho + H_\phi \mathbf{a}_\phi + H_z \mathbf{a}_z = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$ である

から, $H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}, H_\rho = H_z = 0$ となる。式(7.23b)から

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \mathbf{a}_z = \mathbf{0}$$

となる。これから, 電流が流れる部分である z 軸を除いて, 電流密度 $\mathbf{J}$ は $\mathbf{0}$ である。

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (\rho \neq 0)$$

またアンペアの周回路の法則(7.15)から, 電流が貫く曲面 S の面積分は I となる。

$$I = I_{\text{net through } S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

7.3.2 ストークスの定理

(1) 導出

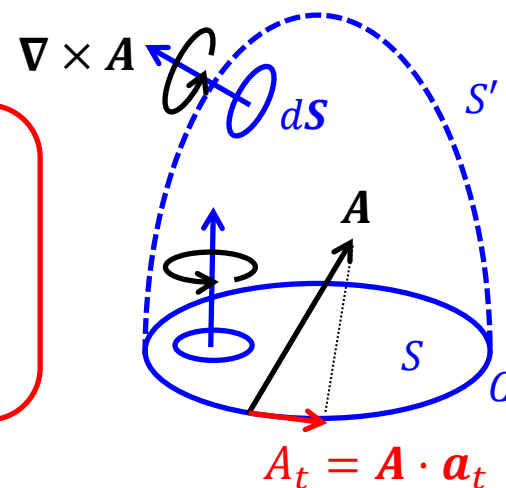
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_{\text{net through } S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$$

アンペアの周回路の法則

アンペアの周回路の法則の微分形

ストークスの定理(数学定理)

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.25)$$

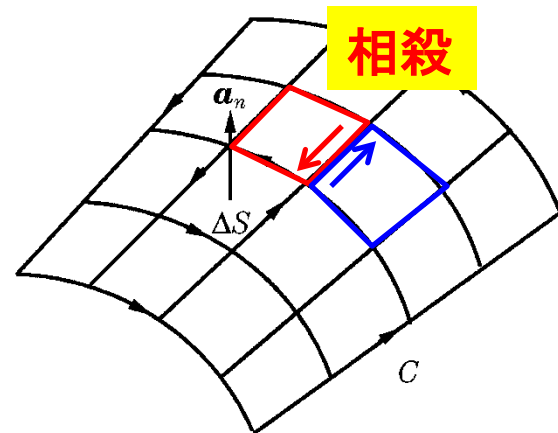


閉曲線 C に沿う任意のベクトル場 $\mathbf{A}$ の接線成分に関する線積分が閉曲線 C に囲まれた曲面 S におけるベクトル場の回転 $\nabla \times \mathbf{A}$ に関する面積分に等しい。

(2) 物理的な意味

閉曲線 C で囲まれた曲面 S を考える。曲面 S を大きさの異なる小さな曲面に分割する。そのうち、一つの小さな曲面に関する線積分について、隣り合う曲面との共通辺において径路の向きが逆転するので、共通辺における線積分の寄与は相殺される。したがって、曲面 S 全体では、小さな曲面に関する線積分の寄与の総計は、共通辺とならない曲面 S の外周である閉曲線 C における線積分に等しい。

これは、大きな渦を考えると、各点における小さな渦を考え、それらの重ね合わせとして渦の量を評価してよいことを意味する。



例題7.11 原点を中心とし, xy 平面内に存在する半径 a の円周を閉曲面 C として, ベクトル場 $A = f(\rho)\mathbf{a}_\phi$ に対してストークスの定理(7.25)が成り立つことを確認せよ。

【略解】
$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\phi=0}^{2\pi} f(a)\mathbf{a}_\phi \cdot (a d\phi \mathbf{a}_\phi) = af(a) \int_0^{2\pi} d\phi = \underline{2\pi af(a)}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho f(\rho)) \mathbf{a}_z \cdot (\rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{d}{d\rho} (\rho f(\rho)) d\rho d\phi = 2\pi [\rho f(\rho)]_0^a = \underline{2\pi af(a)} \end{aligned}$$

7.4 磁界に関するガウスの法則

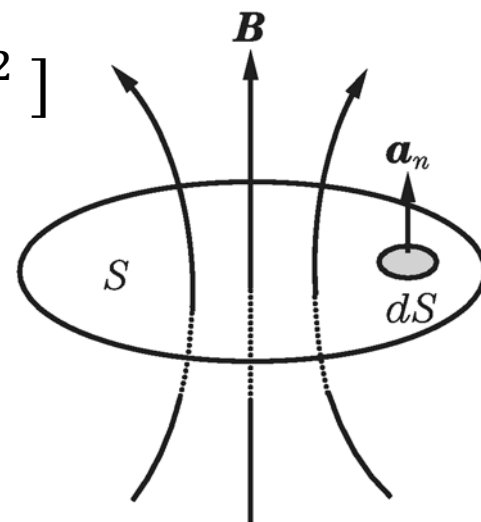
(1-a) 磁束密度の定義

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \begin{matrix} \text{テスラ} \\ [\text{T}] \end{matrix} \quad (7.26) \quad [\text{T}] = [\text{Wb}/\text{m}^2] \quad \begin{matrix} \text{ウェバー} \end{matrix}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \begin{matrix} \text{ヘンリー} \\ \text{H/m} \end{matrix} : \text{自由空間の透磁率}$$

(1-b) 磁束: ある曲面 S を通過する磁力線の流量

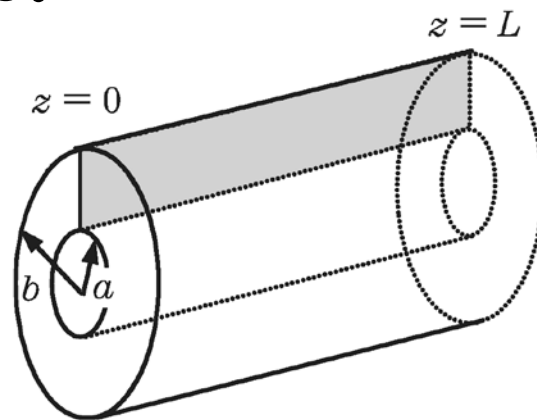
$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad [\text{Wb}] \quad (7.27)$$



例題7.12 同軸ケーブルの内外導体間 ($z = 0$ から $z = L$ の間) の磁束を計算せよ。ただし、内導体の半径を a , 外導体の半径(内径)を b とし、電流 I が内導体断面に一様に $\mathbf{a}_z$ 方向に流れると仮定する。

【略解】

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^L \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi d\rho dz \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^L dz \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

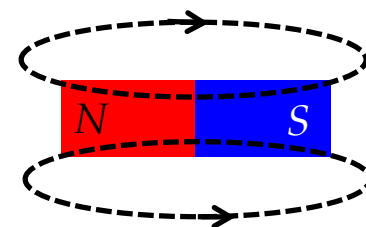


(2) 磁束密度の無終端性(磁界に関するガウスの法則)

磁束の流線(磁力線)は閉じており, 源に終端しない。すなわち, 磁力線には切れ目がない。これを式で表すと

〔微分形〕 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (7.28)

〔積分形〕 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ (7.29)



【証明】 式(7.28)→式(7.29)の証明はガウスの発散定理(3.23)を用いて

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

式(7.28)は, ビオ・サバールの法則(7.6)より数学的に導かれる(次頁)。

→
$$d\mathbf{H} = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \left[\mu_0 \iiint_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \nabla \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) dv'$$

ベクトル恒等式 (B.16) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ を用いて

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot \underbrace{[\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] = \mathbf{0}}_{=0} - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \times \left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \times \underbrace{\left(\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right)}_{=0} dv'$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \right) \nabla R = -\frac{1}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

ベクトル恒等式 (B.21) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

7.5 ベクトルポテンシャル

(1) ベクトルポテンシャルの定義

磁界に関するガウスの法則(7.28) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ とベクトル恒等式(B.22) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ を比較し, つぎのようにベクトルポテンシャルを定義する。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [\text{Wb/m}] \quad (7.31)$$

(2) ベクトルポテンシャルの具体的な形 (基準: 無限遠点)

(2-a) 線電流分布によるベクトルポテンシャル

曲線 C に沿って流れる電流によるベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{R} \quad [\text{Wb/m}]$$

(2-b) 面電流分布によるベクトルポテンシャル

曲面 S 上を流れる電流によるベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS'}{R} \quad [\text{Wb/m}]$$

(2-c) 体積電流分布によるベクトルポテンシャル

領域 v 内を流れる電流によるベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'}{R} \quad [\text{Wb/m}] \quad (7.32)$$

ビオ・サバールの法則の場合と同様に, 電流素片の等価性(7.4)

$$I(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' = \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'$$

に注意すれば, このうち, 一つだけを覚えればよい。

式(7.32)の根拠

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{J(r') dv' \times R}{R^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v J(r') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

$\nabla \times (fc) = -c \times \nabla f \quad c: \text{定ベクトル}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \nabla \times \left(\frac{J(r')}{R} \right) dv' = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{J(r') dv'}{R} \right]$$

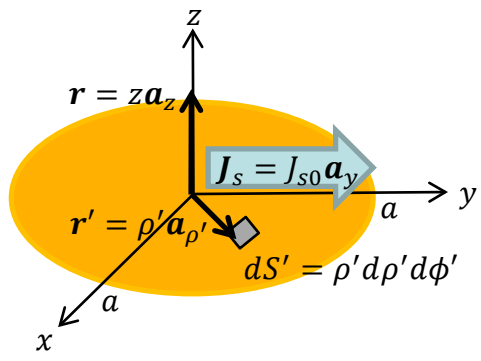
$A(r)$

例題7.13 xy 平面の $\rho \leq a$ の範囲に面電流密度 $J_s = J_{s0} a_y$ の電流が流れるとき、 z 軸上におけるベクトルポテンシャル A および磁界 H を求めよ。ただし、 J_{s0} は定数とする。

【解答】 (解答文は教科書参照)

$$r = z a_z, \quad r' = \rho' a_{\rho'}$$
$$R = r - r' = z a_z - \rho' a_{\rho'}$$
$$R = |R| = \sqrt{\rho'^2 + z^2}$$

$$J_s dS' = J_{s0} \rho' d\rho' d\phi' a_y$$
$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{J(r') dS'}{R}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{J_{s0} \rho' d\rho' d\phi'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \mathbf{a}_y = \frac{\mu_0 J_{s0}}{2} \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \mathbf{a}_y \\
 &= \frac{\mu_0 J_{s0}}{2} \left[\sqrt{\rho'^2 + z^2} \right]_0^a \mathbf{a}_y = \frac{\mu_0 J_{s0}}{2} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right) \mathbf{a}_y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y(z) & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{dA_y(z)}{dz} \mathbf{a}_x = \frac{J_{s0}}{2} \left(\text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \mathbf{a}_x
 \end{aligned}$$

$a \rightarrow \infty$ のとき, すなわち, xy 平面上で y 方向に一様に面電流が分布するとき,

$$\mathbf{H} \rightarrow \frac{J_{s0}}{2} \text{sgn}(z) \mathbf{a}_x$$

となり, 例題7.7の結果に一致する。

(3) クーロンゲージ

定常磁界において、次の関係が成り立つ。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (7.31)$$

【証明】

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dv' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) dv' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}_{=0} \right\} dv' \quad \left(\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (B.14) \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dv' = \boxed{-} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv' \quad \left(\mathbf{A} \cdot \nabla' f = \nabla' \cdot (f\mathbf{A}) - f \nabla' \cdot \mathbf{A} \quad (B.14') \right) \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \left\{ \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) - \underbrace{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{1}{R}}_{= -\frac{\partial \rho_v(\mathbf{r}')}{\partial t} = 0} \right\} dv' \quad \left(\text{連続の式 (定常状態では } \partial/\partial t = 0) \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) dv'$$



ガウスの発散定理

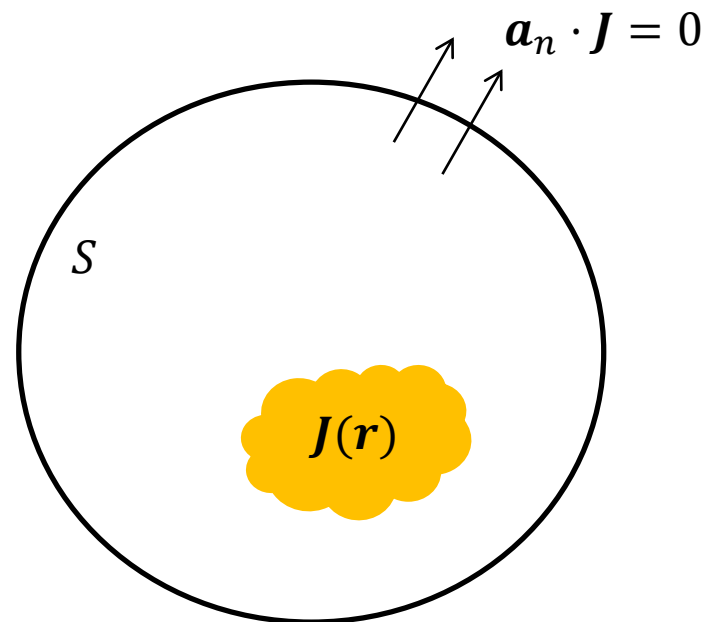
面 S に垂直な電流成分

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \cdot \mathbf{a}_n dS' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\boxed{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{a}_n}}{R} dS'$$

閉曲面 S を電流分布を包含するように十分大きく選ぶと, 閉曲面 S に垂直な電流成分, すなわち, 閉曲面 S から流れ出す電流の法線成分は存在しないので

$$\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{J} = 0$$

となり, 上記の面積分は 0 となる。これから, クローンゲージの式(7.33)が証明された。



8章 電磁力・磁性体・ インダクタンス

- 8.1 運動電荷に作用する力
- 8.2 電流素片に作用する力
- 8.3 一様磁界中におけるループに作用する力とトルク
- 8.4 磁性体の性質
- 8.5 磁性体内部における磁界
- 8.6 境界条件: 磁性体境界における磁界
- 8.7 インダクタンス

8.1 運動電荷に作用する力

(1) ローレンツ力

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (8.1)$$

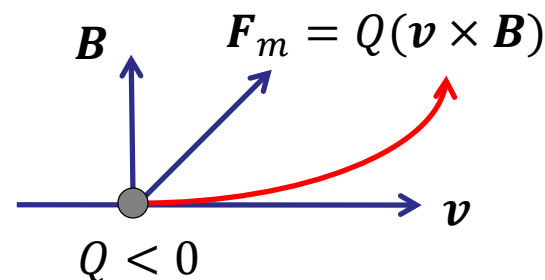
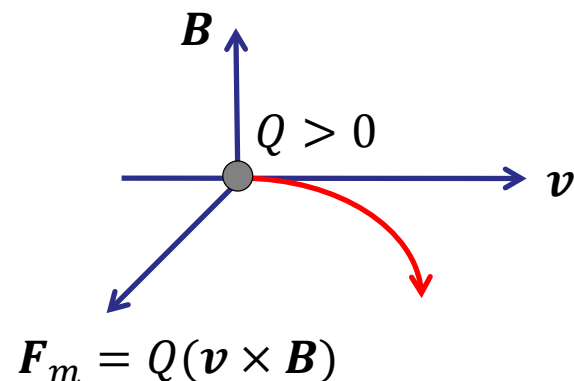
磁束密度 $\mathbf{B}$ に関する力 $\mathbf{F}_m$ がなす仕事の変化量は 0 となる。

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}_m \cdot (\mathbf{v} dt) \\ &= Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{v} dt) = 0 \\ &\quad \because \mathbf{v} \perp \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

このように、力は運動の方向を変えられるが、速さ(運動エネルギー)を変えられない。

※ ローレンツ力の例

ホール効果, サイクロトロン運動(章末問題【1】),
サイクロイド運動(章末問題【2】)



(2) ホール効果

導電性試料において、電流に対して垂直に磁界を印加するとき、電流と磁界に直交する方向に電圧が生じる現象をいう。この電圧をホール電圧といい、その正負により、半導体のn型およびp型を判定することができる。

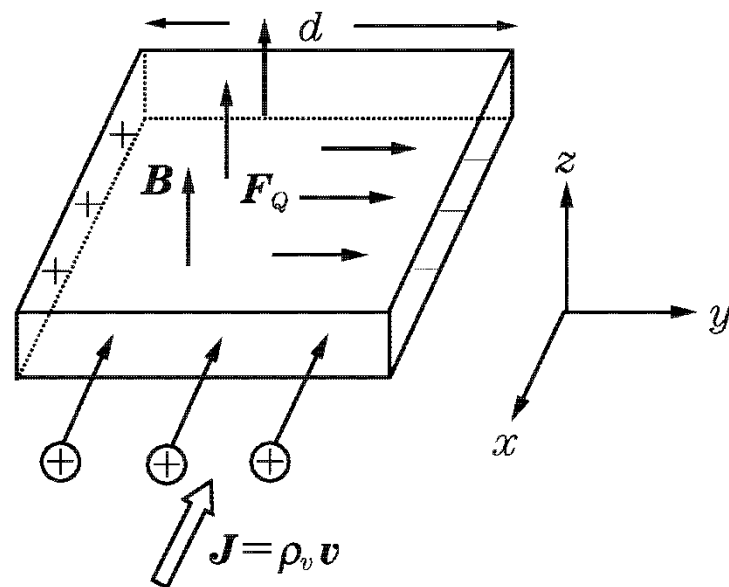
電流を担う電荷 Q に作用するローレンツ力

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_Q &= Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{Q}{\rho_v} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
 &= \frac{Q}{\rho_v} (-J_0 \mathbf{a}_x) \times (B_0 \mathbf{a}_z) = Q \frac{J_0 B_0}{\rho_v} \mathbf{a}_y = Q \mathbf{E}_H
 \end{aligned}$$

ただし

$$\mathbf{E}_H = \frac{J_0 B_0}{\rho_v} \mathbf{a}_y = \underline{R_H (J_0 B_0 \mathbf{a}_y)} \quad (8.2)$$

ホール係数 $= 1/\rho_v$



8.2 電流素片に作用する力

(1) 電流素片に作用する力

(1-a) 体積電流分布

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= (dQ)\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\rho_v dv)\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= (\rho_v \mathbf{v})dv \times \mathbf{B} = \mathbf{J}dv \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\mathbf{F} = \iiint_v \mathbf{J}dv \times \mathbf{B}$$

電流素片の等価性(7.4)から

(1-b) 線電流分布

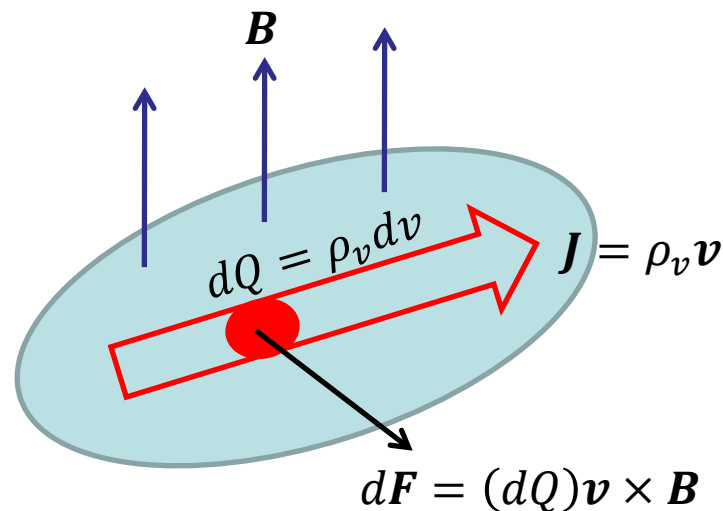
$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (8.5)$$

$$\mathbf{F} = \int_C I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

(1-c) 面電流分布

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J}_s dS \times \mathbf{B} \quad (8.6)$$

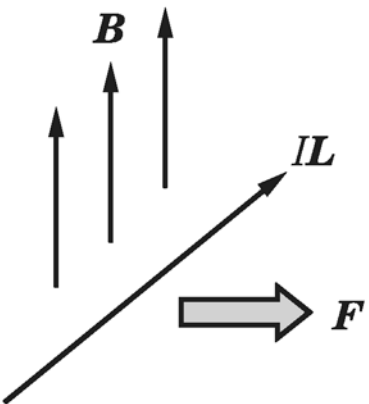
$$\mathbf{F} = \iint_S \mathbf{J}_s dS \times \mathbf{B}$$



(2) 一様磁界中の直線導線に作用する力

$$\mathbf{F} = \int_C I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = I \left(\int_C d\mathbf{r} \right) \times \mathbf{B} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (8.7)$$

$\underline{\hspace{1.5cm}} = \mathbf{L}$

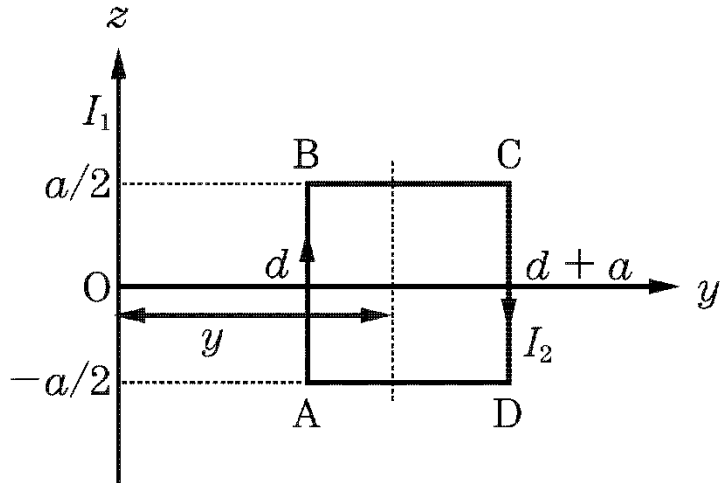


例題8.1 z 軸に沿って一様な電流 I_1 を z 方向に流す。また, z 軸から d の位置に固定された一辺 a の正方形ループに沿って図の向きに一様な電流 I_2 を流す。正方形ループに作用する力を求めよ。

【方針】正方形ループを四つの辺に分けて考え, 各辺に流れる電流による力の和を求める。

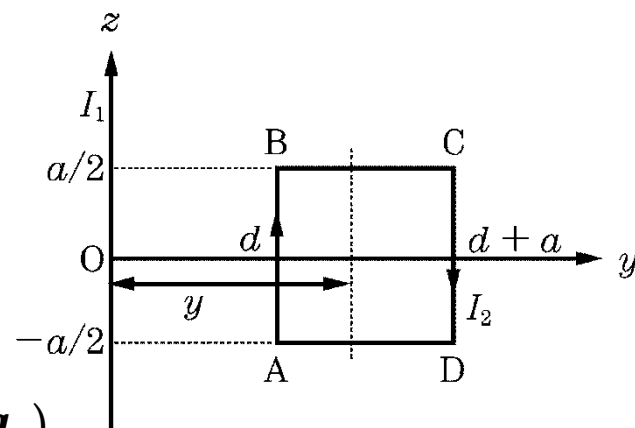
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BC} + \mathbf{F}_{CD} + \mathbf{F}_{DA}$$

各辺に作用する力は, 辺上の電流素片に作用する力を線積分することで得られる。
 z 軸に流れる電流 I_1 による磁束密度は, 式(7.10)より, $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$ と与えられる。



a) 辺AB ($\rho = d, \mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x, \phi = \pi/2, \mathbf{r} = d\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{AB} &= \int_A^B I_2 d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \int_{-a/2}^{a/2} I_2 (dz\mathbf{a}_z) \times \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \mathbf{a}_x \right) \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_{-a/2}^{a/2} dz \mathbf{a}_y = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi d} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$



b) 辺BC ($\rho = y, \mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x, \phi = \pi/2, \mathbf{r} = y\mathbf{a}_y + (a/2)\mathbf{a}_z$)

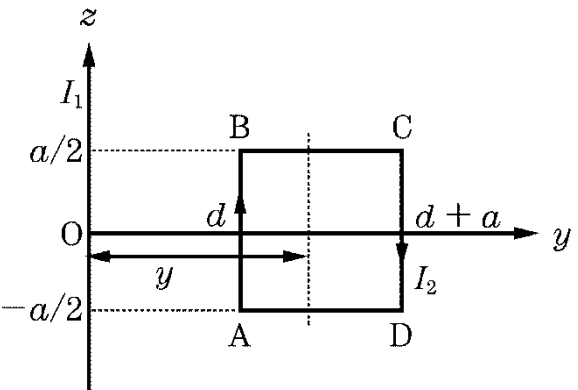
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{BC} &= \int_B^C I_2 d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \int_d^{d+a} I_2 (dy\mathbf{a}_y) \times \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \mathbf{a}_x \right) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dy}{y} \mathbf{a}_z = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} [\ln y]_d^{d+a} \mathbf{a}_z = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \{\ln(d+a) - \ln d\} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(\frac{d+a}{d} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

c) 辺CD ($\rho = d+a, \mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x, \phi = \pi/2, \mathbf{r} = (d+a)\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{CD} &= \int_C^D I_2 d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \int_{a/2}^{-a/2} I_2 (dz\mathbf{a}_z) \times \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} \mathbf{a}_x \right) \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} \int_{a/2}^{-a/2} dz \mathbf{a}_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(d+a)} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

d) 辺DA ($\rho = y, \mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x, \phi = \pi/2, \mathbf{r} = y\mathbf{a}_y + (-a/2)\mathbf{a}_z$)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{DA} &= \int_D^A I_2 d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \int_{d+a}^d I_2 (dy \mathbf{a}_y) \times \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \mathbf{a}_x \right) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{d+a}^d \frac{dy}{y} \mathbf{a}_z = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$



正方形ループ全体に作用する力

辺BCと辺DAの寄与が相殺

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BC} + \mathbf{F}_{CD} + \mathbf{F}_{DA} \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi d} \mathbf{a}_y + \cancel{\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \mathbf{a}_z} + \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(d+a)} \mathbf{a}_y - \cancel{\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \mathbf{a}_z} \end{aligned}$$

辺AB: 引力

>

辺CD: 反発力

ループ全体として引力

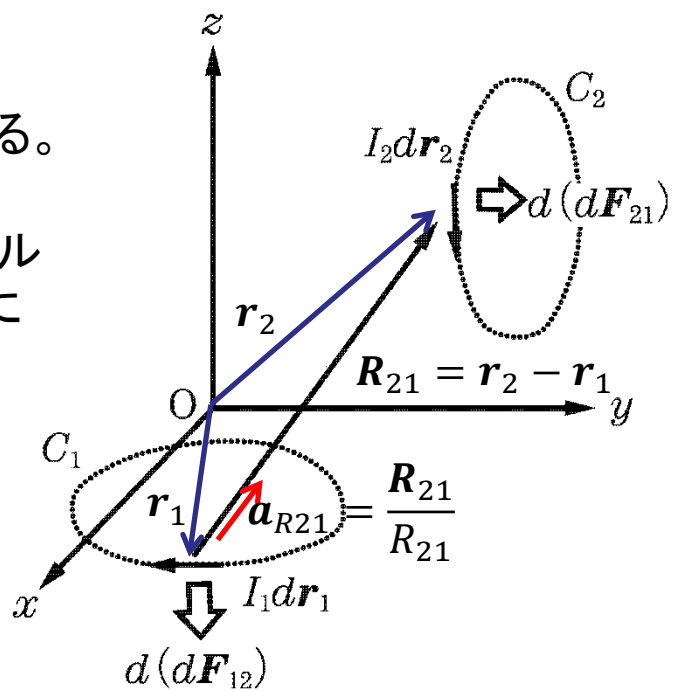
(注) 上記の下線部は $I_1 I_2 > 0$ である場合の話

(3) 電流素片間に作用する力

電流素片 $I_1 d\mathbf{r}_1$ が電流素片 $I_2 d\mathbf{r}_2$ に及ぼす力を考える。

電流素片 $I_1 d\mathbf{r}_1$ による磁束密度 $d\mathbf{B}_{21}$ はビオ・サバールの法則(7.3)により与えられるので、電流素片 $I_2 d\mathbf{r}_2$ に作用する力は次のようになる。

$$\begin{aligned} d(d\mathbf{F}_{21}) &= I_2 d\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{B}_{21} \\ &= I_2 d\mathbf{r}_2 \times \left(\frac{\mu_0 I_1 d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{d\mathbf{r}_2 \times (d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_{R21})}{R_{21}^2} \end{aligned}$$



ベクトル三重積の公式(B.5) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ から

$$d(d\mathbf{F}_{21}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{(d\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{a}_{R21})d\mathbf{r}_1 - (d\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1)\mathbf{a}_{R21}}{R_{21}^2} \quad (8.8)$$

電流素片 $I_2 d\mathbf{r}_2$ が電流素片 $I_1 d\mathbf{r}_1$ に及ぼす力

$$d(d\mathbf{F}_{12}) = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi} \frac{(d\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{a}_{R12})d\mathbf{r}_2 - (d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2)\mathbf{a}_{R12}}{R_{12}^2} \quad (8.9)$$

$$\mathbf{a}_{R21} = -\mathbf{a}_{R12}$$

等しくない



$$d(d\mathbf{F}_{12}) \neq -d(d\mathbf{F}_{21})$$

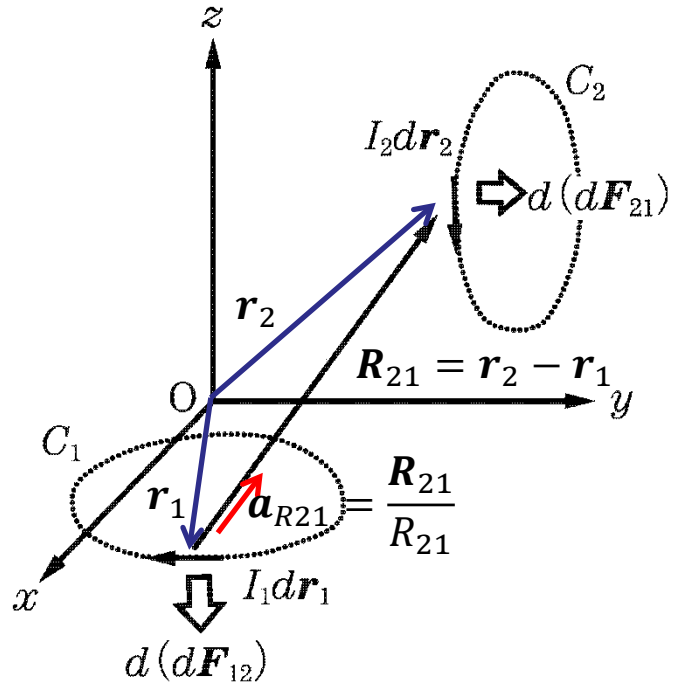
電流素片間では作用・反作用の法則が成り立たない。

(4) ループの間に作用する力

ループの間に作用する力に対しては
作用・反作用の法則が成り立つ。

電流素片 $I_1 d\mathbf{r}_1$ が含まれるループを C_1 とし、
電流素片 $I_2 d\mathbf{r}_2$ が含まれるループを C_2 とする。

ループ C_1 がループ C_2 に作用する力
(電流素片間の力(8.8)を二つのループで線積分する)



$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \left[\frac{(\mathbf{dr}_2 \cdot \mathbf{a}_{R21}) \mathbf{dr}_1}{R_{21}^2} - \frac{(\mathbf{dr}_2 \cdot \mathbf{dr}_1) \mathbf{a}_{R21}}{R_{21}^2} \right] \quad (8.10)$$

第1項の計算

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(\mathbf{dr}_2 \cdot \mathbf{a}_{R21}) \mathbf{dr}_1}{R_{21}^2} &= - \oint_{C_1} \left\{ \oint_{C_2} \nabla_2 \left(\frac{1}{R_{21}} \right) \cdot \mathbf{dr}_2 \right\} \mathbf{dr}_1 \\ &= - \oint_{C_1} \left\{ \oint_{C_2} \nabla_2 \left(\frac{1}{R_{21}} \right) \cdot \mathbf{dr}_2 \right\} \mathbf{dr}_1 \\ &= - \oint_{C_1} \left[\iint_{S_2} \nabla_2 \times \nabla_2 \left(\frac{1}{R_{21}} \right) \cdot d\mathbf{S}_2 \right] \mathbf{dr}_1 = 0 \end{aligned}$$

ストークスの定理

ベクトル恒等式(B.21)
 $\nabla \times (\nabla f) = 0$

結局, ループ C_1 がループ C_2 に作用する力は

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(d\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) \mathbf{a}_{R21}}{R_{21}^2} \quad \mathbf{a}_{R21} = -\mathbf{a}_{R12}$$

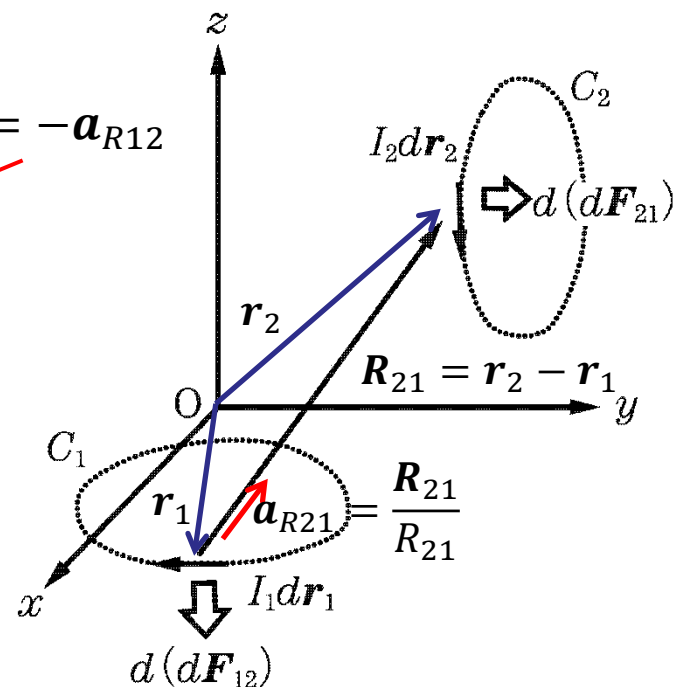
となり, ループ C_2 がループ C_1 に作用する力は

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2) \mathbf{a}_{R12}}{R_{12}^2}$$

となる。これから

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

このように, ループ間に作用する力に関して作用・反作用の法則が成り立つ。



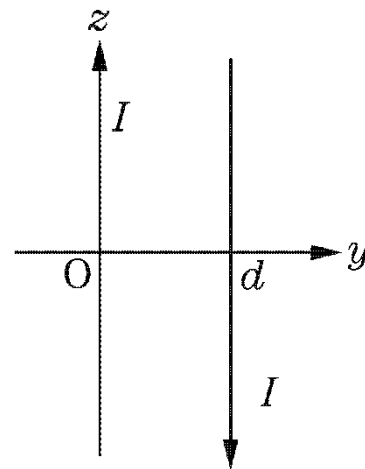
(5) 平行導線間に作用する力

例題8.2 反対方向に電流 I が流れる間隔 d の二本の無限長の平行導線に作用する力を求めよ。

【解答】 z 軸に沿って流れる直線電流が直線 $x = 0, y = d$ につくる磁束密度は $\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{a}_x$ と与えられるから, $x = 0, y = d$ の直線導線に作用する力は, 単位長あたり

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} = I(-\mathbf{a}_z) \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{a}_x \right) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \mathbf{a}_y$$

と与えられる。このように, 反対方向に電流が流れる導線の間には作用する力は反発力である。



〔平行な導線の間には作用する力の性質〕

- ① 力の大きさは, 間隔 d に反比例し, 電流の大きさの積に比例する。
- ② 力の向きは, 同一方向に電流が流れる場合は引力となり, 反対方向に電流が流れる場合は反発力となる。

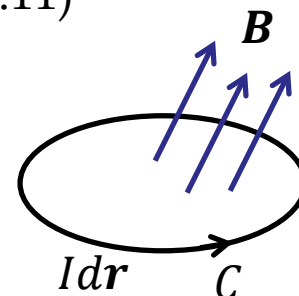
8.3 一様磁界中におけるループに作用する力とトルク

(1) 一様磁界中におけるループに作用する力

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{r} \times \underline{\mathbf{B}} = I \left(\oint_C d\mathbf{r} \right) \times \mathbf{B} = I(\mathbf{0}) \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (8.11)$$

定ベクトル

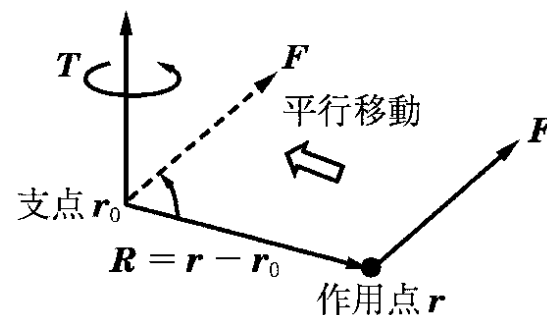
一様な磁界中において一定電流が流れるループに作用する力は **0** となる。



(2) トルクの定義

※ 質点に作用する力のトルク

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (8.12)$$



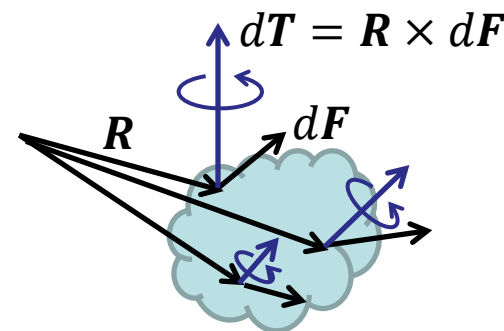
※ ある範囲にわたって作用する力のトルク

〔微分形〕

$$d\mathbf{T} = \mathbf{R} \times d\mathbf{F} \quad (8.13)$$

〔積分形〕

$$\mathbf{T} = \int \mathbf{R} \times d\mathbf{F}$$



(3) 一様磁界中におけるループのトルク

(3-a) 前準備 (数学公式の確認)

$$\oint_C \varphi d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{a}_n \times \nabla \varphi dS \tag{8.14}$$

【証明】

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \varphi \mathbf{c} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{c} \cdot \oint_C \varphi d\mathbf{r}$$

←

$$= \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \varphi \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}_n dS$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{c}) = \nabla \varphi \times \mathbf{c} + \varphi \nabla \times \mathbf{c} = 0$$

$$= \iint_S \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a}_n \times \nabla \varphi) dS = \mathbf{c} \cdot \iint_S \mathbf{a}_n \times \nabla \varphi dS$$

←

$$\oint_C \varphi d\mathbf{r}$$

比較

ストークスの定理

ベクトル恒等式(B.19)

スカラー三重積の公式(B.4) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ より

$$(\nabla \varphi \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n \cdot (\nabla \varphi \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a}_n \times \nabla \varphi)$$

(3-b) ループのトルク（磁束密度 B は一様で，電流 I は一定）

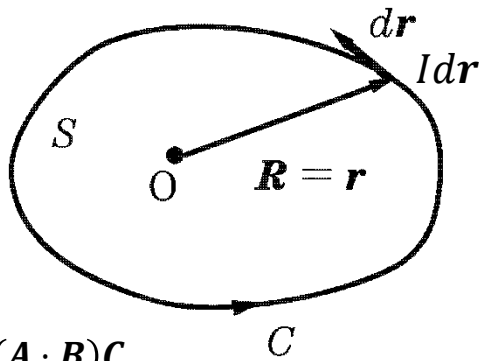
電流素片 $I d\mathbf{r}$ に働くトルク

$$d\mathbf{T} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \tag{8.15}$$

$$= I \{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) \mathbf{B} \}$$

ベクトル三重積の公式(B.5)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$



ループ C 全体に働くトルク

$$\mathbf{T} = \oint_C d\mathbf{T} = I \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{r} - I \left(\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \right) \mathbf{B}$$

公式(8.14)

ストークスの定理

$$= I \iint_S \mathbf{a}_n \times \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) dS - I \left(\iint_S \nabla \times \mathbf{r} \cdot dS \right) \mathbf{B}$$

$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \quad \because \mathbf{B}$ は定ベクトル

$$= I \iint_S \mathbf{a}_n \times \mathbf{B} dS = I \left(\iint_S \mathbf{a}_n dS \right) \times \mathbf{B} = \boxed{I\mathbf{S}} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$= \mathbf{m}$ 磁気モーメント

$$= \iint_S dS = S \quad \text{面積ベクトル}$$

$\mathbf{B}$ が定ベクトルならば

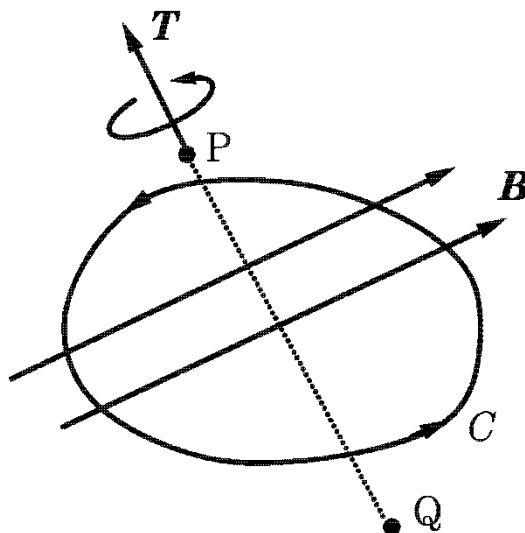
$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) &= \nabla(xB_x + yB_y + zB_z) \\ &= \mathbf{a}_x \frac{\partial(xB_x + yB_y + zB_z)}{\partial x} \\ &\quad + \mathbf{a}_y \frac{\partial(xB_x + yB_y + zB_z)}{\partial y} \\ &\quad + \mathbf{a}_z \frac{\partial(xB_x + yB_y + zB_z)}{\partial z} \\ &= \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z \\ &= \mathbf{B} \end{aligned}$$

ループ C 全体に働くトルク

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (8.19)$$

(3-c) 直流モーターの原理

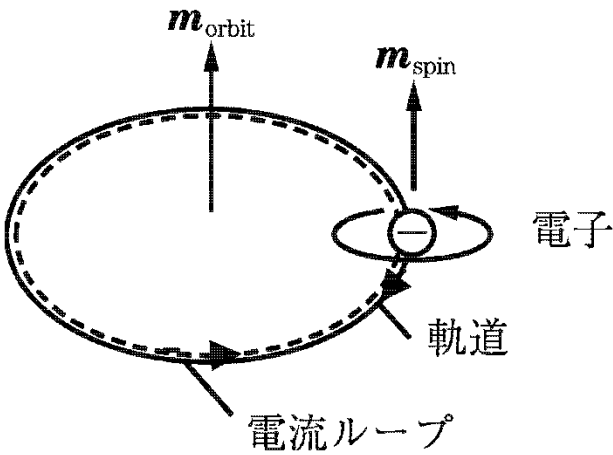
一様な磁束密度 $\mathbf{B}$ が印加される場合, 電流ループ C に軸 PQ に沿ってトルク $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ が生じ, この軸のまわりに回転する



8.4 磁性体の性質

(1) 電子の軌道運動と自転運動

軌道運動および自転運動により内部磁界
(磁気モーメント)が発生する。

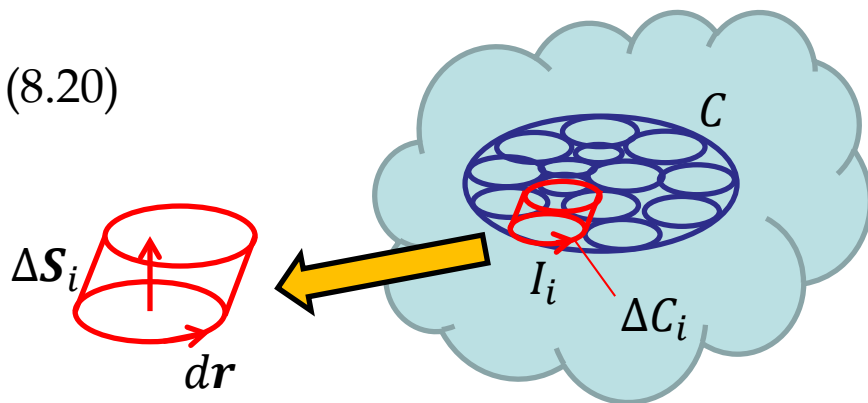


(2) 磁性体の種類

分類	磁気モーメント	備考
反磁性体	$m_{orbit} + m_{spin} = 0$	
常磁性体	$m_{orbit} + m_{spin} = \text{small}$	
強磁性体	$ m_{spin} \gg m_{orbit} $	Fe, Ni, Co(磁区, ヒステリシス)
反強磁性体	$ m_{spin} \gg m_{orbit} $	隣接モーメント反転
フェリ磁性体	$ m_{spin} > m_{orbit} $	フェライト
超常磁性体	$ m_{spin} \gg m_{orbit} $	磁気テープ

(3) 磁化：単位体積当りの磁気モーメントのベクトル和

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \quad [\text{A/m}] \quad (8.20)$$



(4) 内部磁界の源としての束縛電流

$$\begin{aligned} I_b &= \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \left(\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n \oint_{\Delta C_i} \mathbf{m}_i \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n \oint_{\Delta C_i} (I_i \Delta \mathbf{S}_i) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n I_i \oint_{\Delta C_i} \Delta \mathbf{S}_i \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n I_i \Delta v_i \end{aligned} \quad (8.21)$$

ΔC_i を底辺とする
斜筒構造の体積

束縛ループ電流の
体積的な平均

8.5 磁性体内部における磁界

アンペアの周回路の法則と磁界の再定義

磁性体内を流れる電流 = 束縛電流 I_b + 自由電荷による電流 I

アンペアの周回路の法則 (7.15)
$$I_b + I = \oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\therefore I = \oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{r} - I_b = \oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{r} - \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{r}$$

$= \mathbf{H}$ (磁界の再定義)

書き改められたアンペアの周回路の法則

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I \quad (8.23)$$

微分形

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (8.24)$$

$I, \mathbf{J}$ とも自由電荷による
電流に関する量である



これまで通り, 自由電荷による電流
に関する量に対してアンペアの周回
路の法則を適用すればよい。

磁束密度 $\mathbf{B}$ と磁界 $\mathbf{H}$ の関係

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (8.22)$$

(2) 透磁率： 磁束密度と磁界との間の比例係数(線形媒質の場合)

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \qquad (8.25)$$

比透磁率：自由空間の透磁率に対する比

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \qquad (8.26)$$

(3) 磁化率：磁化と磁界の間の比例係数(線形媒質の場合)

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \qquad (8.27)$$

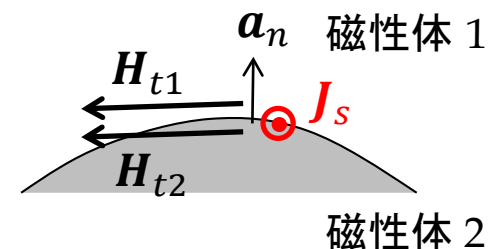
物質	χ_m	物質	χ_m	物質	χ_m
銅	-0.94×10^{-5}	空気	3.60×10^{-7}	ニッケル	294
鉛	-1.70×10^{-5}	プラチナ	2.90×10^{-4}	鉄	$\sim 10^4$
水	-0.88×10^{-5}	アルミニウム	2.10×10^{-5}	パーマロイ	$\sim 10^6$
真空	0.00	液体酸素	3.5×10^{-3}	MnZnフェライト	~ 2000

8.6 境界条件： 磁性体境界における磁界

磁性体境界における磁界

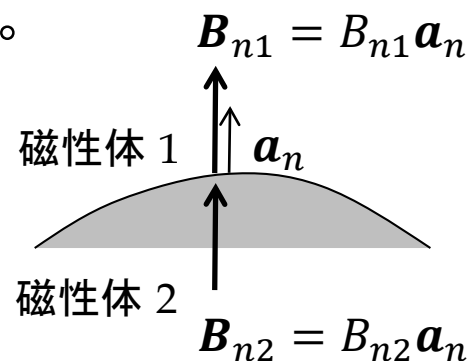
条件① 境界において、磁界の接線成分の不連続成分は面電流密度に等しい。

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (8.29)$$



条件② 境界において、磁束密度の法線成分は等しい。

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (8.30)$$



〔条件① $\mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s$ の証明〕

出発式 $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_{\text{net through } S}$

線積分の変形

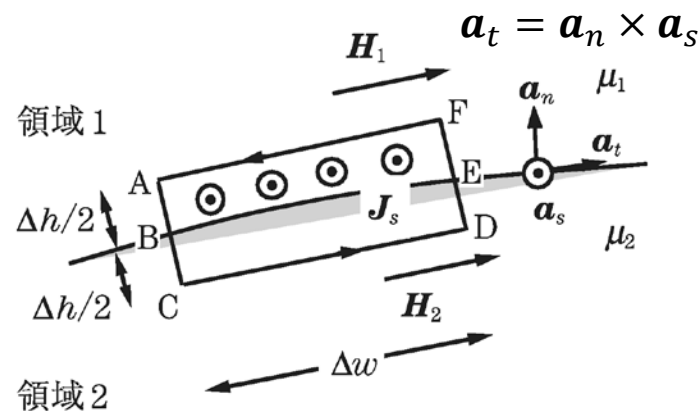
$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^E + \int_E^F + \int_F^A \\ &= \mathbf{H}_1 \cdot \int_A^B d\mathbf{r} + \mathbf{H}_2 \cdot \int_B^C d\mathbf{r} + \mathbf{H}_2 \cdot \int_C^D d\mathbf{r} \\ &\quad + \mathbf{H}_2 \cdot \int_D^E d\mathbf{r} + \mathbf{H}_1 \cdot \int_E^F d\mathbf{r} + \mathbf{H}_1 \cdot \int_F^A d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{H}_1 \cdot \left(-\frac{\Delta h}{2} \mathbf{a}_n \right) + \mathbf{H}_2 \cdot \left(-\frac{\Delta h}{2} \mathbf{a}_n \right) + \mathbf{H}_2 \cdot (\Delta w \mathbf{a}_t) \\ &\quad + \mathbf{H}_2 \cdot \left(\frac{\Delta h}{2} \mathbf{a}_n \right) + \mathbf{H}_1 \cdot \left(\frac{\Delta h}{2} \mathbf{a}_n \right) + \mathbf{H}_1 \cdot (-\Delta w \mathbf{a}_t) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{a}_t \Delta w$$

$$= (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\mathbf{a}_n \times \mathbf{a}_s) \Delta w = \{ \mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \} \cdot \mathbf{a}_s \Delta w$$

$$I_{\text{net through } S} = \boxed{\mathbf{J}_s} \cdot \mathbf{a}_s \Delta w$$

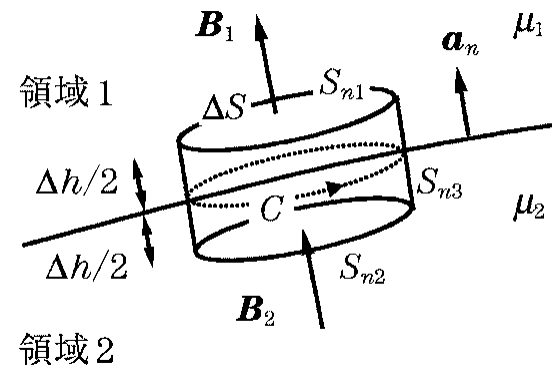
スカラー三重積の公式(B.4) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$



〔条件② $\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$ の証明〕

出発式
$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

面積分の変形

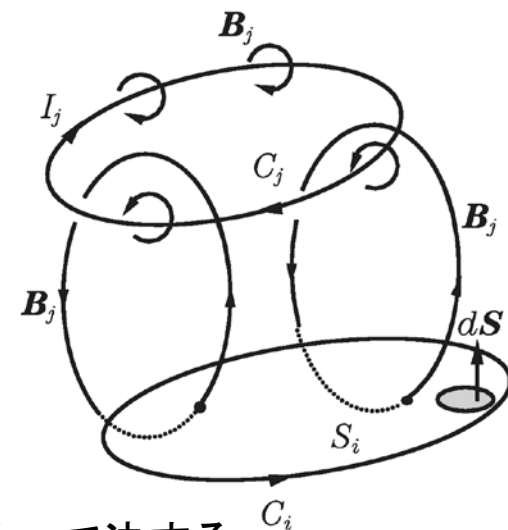


$$\begin{aligned}
 \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_{n1}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{n2}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{n3}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \mathbf{B}_1 \cdot \iint_{S_{n1}} d\mathbf{S} + \mathbf{B}_2 \cdot \iint_{S_{n2}} d\mathbf{S} + \int dh \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
 &\underset{\Delta h \rightarrow 0}{=} \{\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{a}_n + \mathbf{B}_2 \cdot (-\mathbf{a}_n)\} \Delta S + \frac{\Delta h}{2} \left(\oint_C \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{r} \right) \\
 &\rightarrow \boxed{\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)} \Delta S = \boxed{0}
 \end{aligned}$$

8.7 インダクタンス

(0-a) インダクタンスの定義

$$L_{ij} = \frac{\Phi_{ij}}{I_j} = \frac{1}{I_j} \iint_{S_i} \mathbf{B}_j \cdot d\mathbf{S} \quad \begin{array}{l} [\text{H}] \\ = [\text{Wb/m}] \end{array} \quad (8.31)$$



(0-b) インダクタ

- ・磁束を保持できる構成
- ・さまざまな回路で利用されている
- ・インダクタンスは導体の大きさや位置，磁性体の配置によって決まる

(0-c) インダクタンスの計算方法

- ① 電流分布 $\mathbf{J}$ を仮定し，鎖交磁束 Λ を計算する。

$$L_{ij} = \frac{\Lambda_{ij}}{I_j} = \frac{N_i \Phi_{ij}}{I_j} \quad (8.33)$$

- ② ノイマンの公式を適用する。

$$L_{ij} = \frac{\mu N_i N_j}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j \cdot d\mathbf{r}_i}{R_{ij}} \quad (8.35)$$

- ③ 電流分布 $\mathbf{J}$ を仮定し，磁氣的蓄積エネルギー W_m を計算する。〔See 9.2節〕

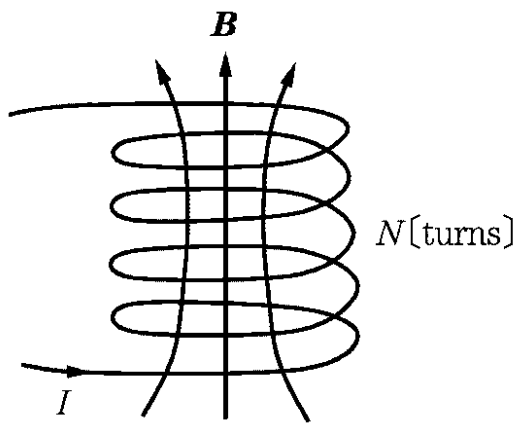
$$L_{ij} = \frac{1}{I_i I_j} \iiint_v \mu \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{H}_j dv \quad (9.30)$$

(1) 鎖交磁束とインダクタンス

鎖交磁束： $\Lambda_{ij} = N_i \Phi_{ij}$ [Wb] (8.32)

インダクタンスの再定義

$$L_{ij} = \frac{\Lambda_{ij}}{I_j} = \frac{N_i \Phi_{ij}}{I_j} \quad [\text{H}] \quad (8.33)$$



(2) 自己インダクタンスと相互インダクタンス

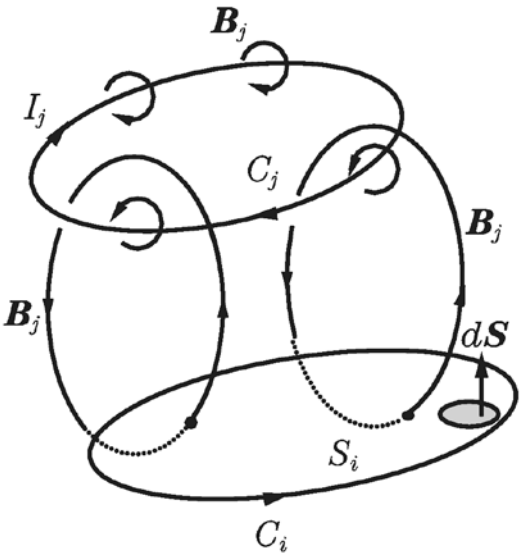
ループ自身による鎖交磁束

自身以外による鎖交磁束

$$\Lambda_i = \Lambda_{ii} + \sum_{i \neq j} \Lambda_{ij} = L_{ii} I_i + \sum_{i \neq j} L_{ij} I_j \quad (8.34)$$

自己インダクタンス

相互インダクタンス



(3-a) ノイマンの公式

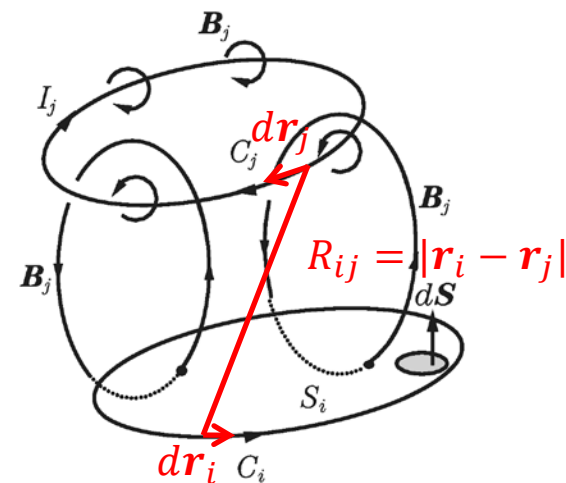
電流 I_j が N_j 巻きのループ C_j に流れるとき, N_i 巻きのループ C_i に囲まれる曲面 S_i を通過する鎖交磁束 Λ_{ij}

$$\Lambda_{ij} = N_i \iint_{S_i} \mathbf{B}_j \cdot d\mathbf{S}_i = N_i \iint_{S_i} \nabla \times \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{S}_i$$

← ストークスの定理

$$= N_i \oint_{C_i} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{r}_i = N_i \oint_{C_i} \left(\frac{\mu(N_j I_j)}{4\pi} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j}{R_{ij}} \right) \cdot d\mathbf{r}_i$$

$$= \frac{\mu N_i N_j I_j}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{r}_j \cdot d\mathbf{r}_i}{R_{ij}} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{R} \quad (7.32')$$



$$\text{ノイマンの公式: } L_{ij} = \frac{\Lambda_{ij}}{I_j} = \frac{\mu N_i N_j}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j \cdot d\mathbf{r}_i}{R_{ij}} \quad (8.35)$$

(3-b) 相互インダクタンスの可逆性

$$L_{ji} = L_{ij}$$



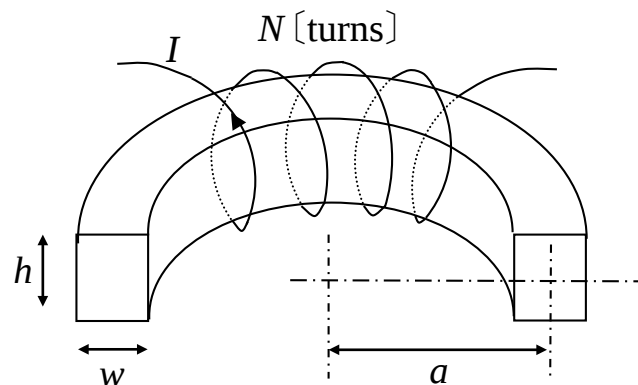
どちらのループに電流を流しても相互インダクタンスを計算できるが、可逆性が成り立っているため、簡単に計算できる方の相互インダクタンスを計算するのが得策である。

例題8.3 断面が $h \times w$ の長方形であるようなトロイダルコイルの自己インダクタンス L を求めよ。トロイダルコイルは同じ断面の鉄心(透磁率 μ)に N 回巻かれているものとする。

【略解】コイル内部における磁束密度

$$\mathbf{B} = \frac{\mu N I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{例題7.9参照})$$

コイル断面における磁束



$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{z=-h/2}^{h/2} \int_{\rho=a-w/2}^{a+w/2} \frac{\mu N I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi d\rho dz \\ &= \frac{\mu N I h}{2\pi} \int_{a-w/2}^{a+w/2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu N I h}{2\pi} [\ln \rho]_{a-w/2}^{a+w/2} \\ &= \frac{\mu N I h}{2\pi} \left\{ \ln \left(a + \frac{w}{2} \right) - \ln \left(a - \frac{w}{2} \right) \right\} = \frac{\mu N I h}{2\pi} \ln \frac{a + w/2}{a - w/2} \end{aligned}$$

自己インダクタンス

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N\Phi}{I} = N^2 \frac{\mu h}{2\pi} \ln \frac{a + w/2}{a - w/2}$$

例題8.4 無限に長い直線導線に平行に一边 a の正方形ループが同一平面内に置かれたとき, その間の相互インダクタンスを求めよ。ただし, 正方形と直線電流までの最短距離を d とする。

【略解】直線電流 I_1 が正方形ループ内の点 $(0, y, z)$ に作る磁束密度

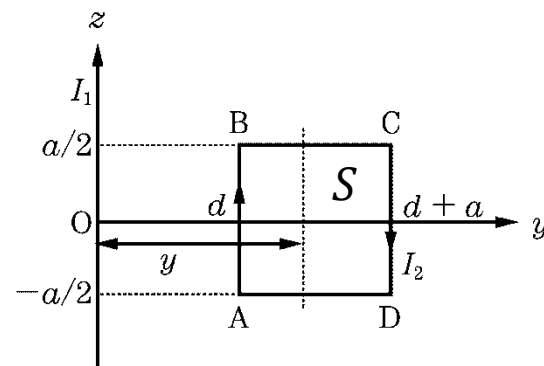
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} (-\mathbf{a}_x)$$

正方形ループと鎖交する磁束

$$\begin{aligned}\Lambda &= \iint_S \mathbf{B} \cdot (-\mathbf{a}_x dS) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \iint_S \frac{dz}{y} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dz \int_d^{d+a} \frac{dy}{y} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} [\ln y]_d^{d+a} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \{\ln(d+a) - \ln d\} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}\end{aligned}$$

相互インダクタンス

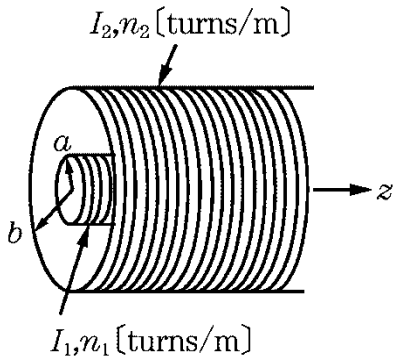
$$M = \frac{\Lambda}{I_1} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$



例題8.5 同軸ソレノイド(鉄心なし)の単位長あたりの自己インダクタンスおよび相互インダクタンスを求めよ。内側ソレノイドは、半径 a の円の断面であり、単位長あたりの巻き数が n_1 であって、外側ソレノイドは、半径 b の円の断面であって、単位長あたりの巻き数が n_2 である。

【略解】内側ソレノイドによる磁束密度
$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} \mu_0 n_1 I_1 \mathbf{a}_z & \rho < a \\ \mathbf{0} & \rho > a \end{cases}$$

外側ソレノイドによる磁束密度
$$\mathbf{B}_2 = \begin{cases} \mu_0 n_2 I_2 \mathbf{a}_z & \rho < b \\ \mathbf{0} & \rho > b \end{cases}$$



$$L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1} = \frac{n_1 \Phi_{11}}{I_1} = \frac{n_1}{I_1} \iint_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = \frac{n_1}{I_1} \iint_{S_1} \mu_0 n_1 I_1 \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dS$$
$$= \mu_0 n_1^2 \iint_{S_1} dS = \mu_0 n_1^2 \cdot \pi a^2$$

$$L_{22} = \frac{\Lambda_{22}}{I_2} = \frac{n_2 \Phi_{22}}{I_2} = \frac{n_2}{I_2} \iint_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} = \frac{n_2}{I_2} \iint_{S_2} \mu_0 n_2 I_2 \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dS = \mu_0 n_2^2 \iint_{S_2} dS$$
$$= \mu_0 n_2^2 \cdot \pi b^2$$

$$L_{21} = \frac{\Lambda_{21}}{I_1} = \frac{n_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{n_2}{I_1} \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = \frac{n_2}{I_1} \iint_{S_1} \mu_0 n_1 I_1 \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dS = \mu_0 n_1 n_2 \iint_{S_1} dS$$
$$= \mu_0 n_1 n_2 \cdot \pi a^2$$

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_2} = \frac{n_1 \Phi_{12}}{I_2} = \frac{n_1}{I_2} \iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} = \frac{n_1}{I_2} \iint_{S_1} \mu_0 n_2 I_2 \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dS = \mu_0 n_1 n_2 \iint_{S_1} dS$$
$$= \mu_0 n_1 n_2 \cdot \pi a^2$$

↑ S_1 の外側($\rho > a$)で $\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}$

9章 時間変化する電磁界

- 9.1 電磁誘導の法則
- 9.2 磁氣的蓄積エネルギー
- 9.3 仮想変位と磁界の及ぼす力
- 9.4 変位電流
- 9.5 マクスウェルの方程式
- 9.6 ポインティングベクトル

9.1 電磁誘導の法則

(1) ファラデーの電磁誘導の法則 (1831)

ループに鎖交する磁束が時間的に変化するとき、ループの鎖交磁束 Λ の時間変化 $-d\Lambda/dt$ に比例した起電力が誘導される。その向きは鎖交磁束の変化を妨げるようにループ状に流れる電流の向きと一致する。

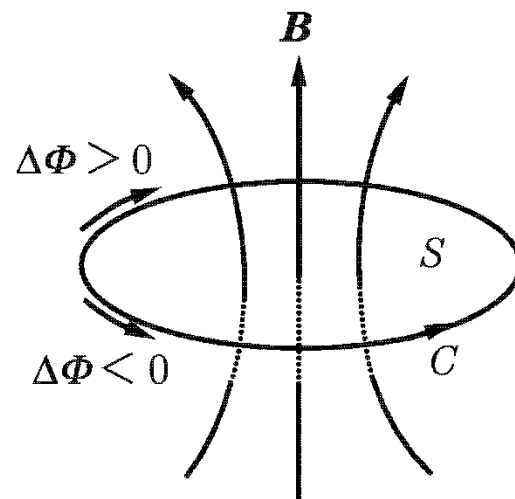
すなわち、鎖交磁束が増加(減少)するとき、その磁束を減少(増加)させるようにループ上に流れる電流の向きに起電力が生じる。

〔向きの部分を『レンツの法則』という〕

N 巻きのループに対するファラデーの電磁誘導の法則の数学的表現

$$V_e = -\frac{d\Lambda}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (9.1)$$

Φ は一巻きあたりの磁束とする。



簡単のため, $N = 1$ (一巻き) として議論する。

ヘルムホルツの輸送定理(式(A.6))および $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (式(7.28)) の関係から, ファラデーの電磁誘導の法則(9.1)は次のように分解できる。

$$V_e = \underbrace{-\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}_{\text{磁束の時間的变化}} = \underbrace{-\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}}_{\text{①磁束密度の時間的变化}} + \underbrace{\oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}}_{\text{②ループの運動}} \quad (9.3)$$

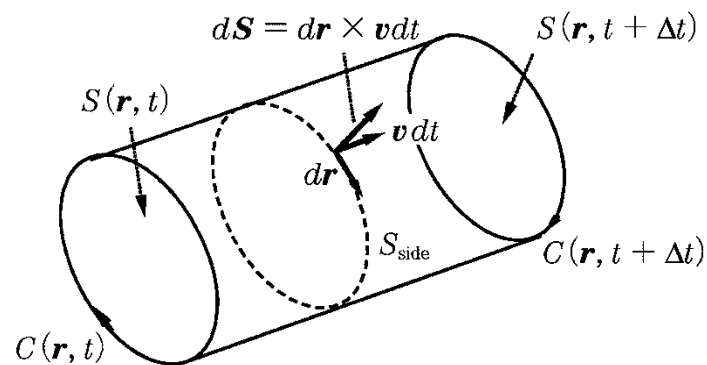
磁束の時間的变化 = ①磁束密度の時間的变化 + ②ループの運動

起電力 V_e に対応する電界 $\mathbf{E}$ の定義

$$V_e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.4)$$

式(9.3), (9.4)から

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (9.5)$$



(2) 磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ が時間的に変化し, ループ C が静止している場合

ループ C によって囲まれた曲面 S が時刻 t の関数でないことから

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} - \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \right\} \\
 &= \iint_S \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} \right\} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}
 \end{aligned}$$

これから

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.6)$$

ストークスの定理 $\parallel$

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.9)$$

マクスウェルの方程式の一つ

(3) 磁束密度 $\mathbf{B}$ が時間的に変化せず, ループ $C(\mathbf{r}, t)$ が運動している場合
 ループ $C(\mathbf{r}, t)$ およびそれが囲む曲面 $S(\mathbf{r}, t)$ は時刻 t の関数であるから

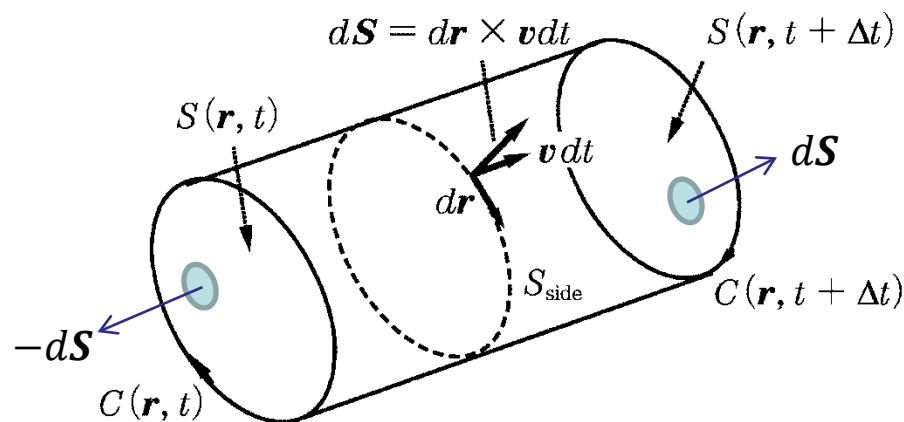
$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iint_{S(\mathbf{r}, t + \Delta t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S(\mathbf{r}, t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right\}\end{aligned}\quad (9.12)$$

磁界に関するガウスの法則(7.29)から

$$\iint_{S(\mathbf{r}, t)} \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{S}) + \iint_{S(\mathbf{r}, t + \Delta t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{side}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9.13)$$

これより

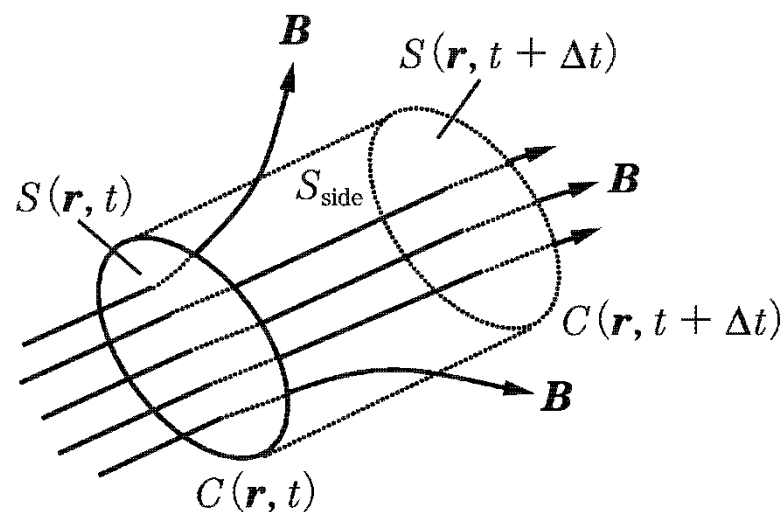
$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iint_{S_{\text{side}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &\quad \dots\end{aligned}\quad (9.14)$$



〔式(9.14)の意味〕

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iint_{S_{\text{side}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.14)$$

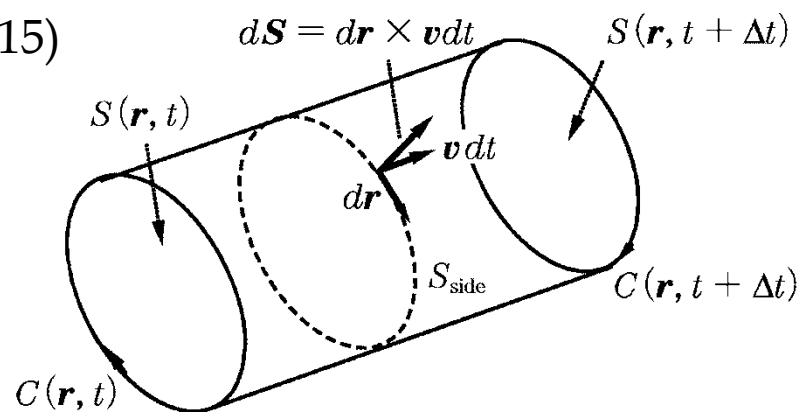
磁束の時間的变化は、最初にループを通過していた磁束から移動後のループを通過する磁束を差し引いた磁束の時間的变化、すなわち、右図の側面 S_{side} を通過する磁束の時間的变化に等しい。



$$\begin{aligned} \iint_{S_{\text{side}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{\Delta t} \oint_{C(\mathbf{r}, t)} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt) \\ &\approx \Delta t \oint_{C(\mathbf{r}, t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (9.15)$$

式(9.15)を式(9.14)に代入して

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\oint_{C(\mathbf{r}, t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (9.16)$$



以上から

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}} \quad (9.18)$$

例題9.1 U字形に曲げた導線に直線状の導線をわたして長方形回路を作る。U字形の導線の向かい合う二辺の間隔を l とする。このとき、回路に対して垂直になるように、大きさ B の一様な磁束密度を印加する。わたした導線が一定の速さ v で運動するとき、磁束の時間変化に着目して、回路に生じる起電力を求めよ。

【解答】図のように座標系を設定すると、題意より

$$\mathbf{B} = B\mathbf{a}_z, \mathbf{v} = v\mathbf{a}_x$$

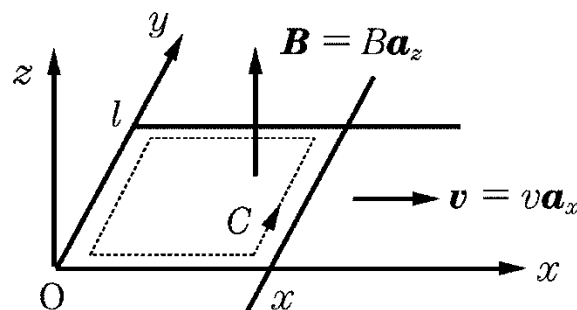
となる。直線状導線の運動による誘導電界は

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v\mathbf{a}_x) \times (B\mathbf{a}_z) = -vB\mathbf{a}_y$$

であるから、ループ C に沿って生じる起電力は

$$V_e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{y=0}^l (-vB\mathbf{a}_y) \cdot (\mathbf{a}_y dy) = -vB \int_0^l dy = -vBl$$

となる。負号は起電力がループ C と反対向きに生じることを意味する。



(4) 自己誘導と相互誘導

ループ C_i における鎖交磁束

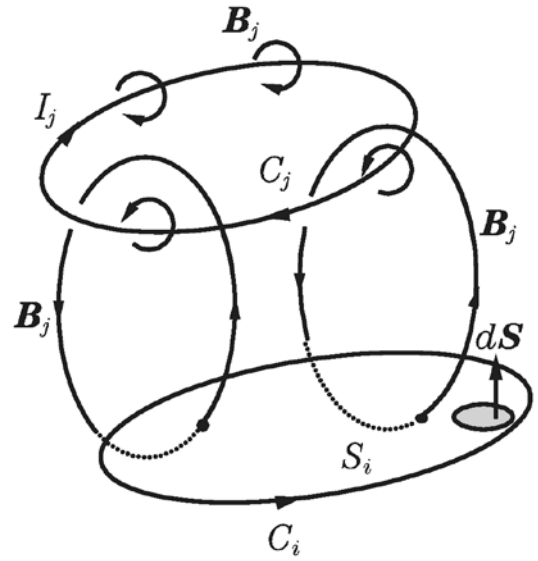
ループ自身による鎖交磁束

自身以外による鎖交磁束

$$\Lambda_i = \Lambda_{ii} + \sum_{i \neq j} \Lambda_{ij} = L_{ii} I_i + \sum_{i \neq j} L_{ij} I_j \quad (8.34)$$

自己インダクタンス

相互インダクタンス



ループ C_i に生じる起電力

ループ自身に流れる電流による起電力

自身以外に流れる電流による起電力

$$V_{ei} = -\frac{d\Lambda_i}{dt} = -L_{ii} \frac{dI_i}{dt} - \sum_{i \neq j} L_{ij} \frac{dI_j}{dt} \quad (9.19)$$

自己誘導

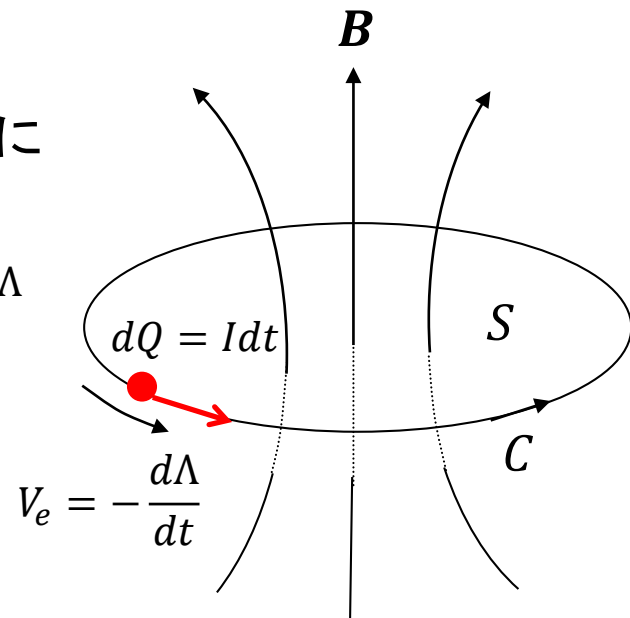
相互誘導

9.2 磁気的蓄積エネルギー

(1) 磁氣的蓄積エネルギーの回路的表現

微小電荷がループ C に沿って運動するために
外部から供給を受けるエネルギー

$$\begin{aligned}
 dW_m &= -V_e dQ = -V_e I dt & -V_e dt &= d\Lambda \\
 &= Id\Lambda = \frac{1}{L} \Lambda d\Lambda & (9.20) \\
 & \quad \quad \quad I = \Lambda/L
 \end{aligned}$$



式(9.20)は鎖交磁束が Λ から $\Lambda + d\Lambda$ までのとき, 外部から供給されるエネルギーなので, 鎖交磁束が0から Λ まで変化する際のエネルギーは

$$W_m = \int_0^{\Lambda} \frac{1}{L} \Lambda d\Lambda = \frac{1}{2} \frac{\Lambda^2}{L} = \frac{1}{2} \Lambda I = \frac{1}{2} LI^2 \quad (9.21)$$

となる。これを**磁氣的蓄積エネルギー**という。

式(9.20)の補足

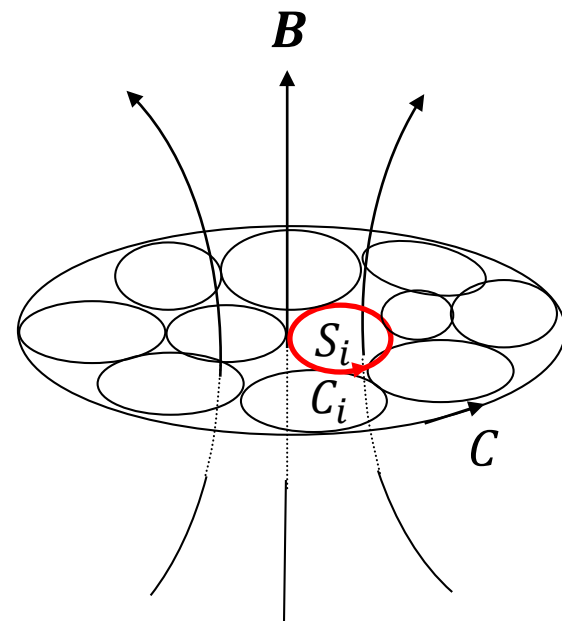
$$W = \int_C (qE) \cdot d\mathbf{r} = -q \left(- \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right) = -qV$$

(2) 磁氣的蓄積エネルギーとそのエネルギー密度

曲面 S_i を通過する鎖交磁束 (巻き数 N_i)

$$\begin{aligned}\Lambda_i &= N_i \iint_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= N_i \iint_{S_i} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = N_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.22)\end{aligned}$$

ストークスの定理



ループ C 内で必要な外部エネルギー

$$\begin{aligned}W_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} I_i \Lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} I_i N_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot N_i I_i d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{A} \cdot N I d\mathbf{r} \quad (9.23)\end{aligned}$$

隣り合う微小ループの共有部分の線積分は経路の向きが反転しているだけなので、打ち消し合い、外周ループのみ残る。

電流素片 $NId\mathbf{r}$ を体積素を用いて記述し直す。

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_v \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dv \quad (9.25)$$

さらに

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \underbrace{\nabla \times \mathbf{B}}_{=\mu\mathbf{J}} - \mathbf{B} \cdot \underbrace{\nabla \times \mathbf{A}}_{=\mathbf{B}} = \mu \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

の関係およびガウスの発散定理を利用して

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2\mu} \iiint_v \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) dv + \frac{1}{2} \iiint_v \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \\ &= \frac{1}{2\mu} \oint_S \mathbf{B} \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_v \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} dv \end{aligned} \quad (9.26)$$


 $0 \quad (r \rightarrow \infty \text{ のとき}) \text{ 過去のQ\&Aから A9.1参照}$

$$= \iiint_v \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} dv = \iiint_v w_m dv \quad (9.27)$$

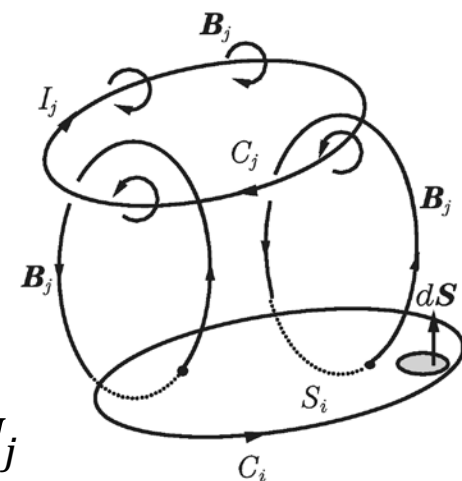
磁界のエネルギー密度 (単位体積あたりの磁氣的蓄積エネルギー)

$$w_m = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \quad (9.28)$$

(3) 磁氣的蓄積エネルギーによるインダクタンスの表現

 n 個のループ全体での磁氣的蓄積エネルギー

$$\begin{aligned}
 W_m &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \Lambda_i I_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\sum_i^n L_{ij} I_j \right) I_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \underline{L_{ii} I_i^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \underline{L_{ij} I_i I_j} \\
 W_m &= \frac{1}{2} \iiint_v \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = \frac{1}{2} \iiint_v \mu \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{H}_j \right) dv \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \iiint_v \mu |\mathbf{H}_i|^2 dv + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \iiint_v \mu \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{H}_j dv
 \end{aligned}$$



自己インダクタンス

相互インダクタンス

$$L_{ii} = \frac{1}{I_i^2} \iiint_v \mu |\mathbf{H}_i|^2 dv \quad (9.30)$$

$$L_{ij} = \frac{1}{I_i I_j} \iiint_v \mu \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{H}_j dv \quad (9.31)$$

例題9.2 同軸ケーブルの単位長さ当りの自己インダクタンスを計算せよ。ただし、内導体は半径を a の導電性(透磁率 μ_0)の導体とし、外導体は半径 b の導電シールドとする。なお、内外導体間の透磁率を μ とし、電流 I が内導体断面を一様に流れていると仮定せよ。

【解答】同軸ケーブルの中心軸を z 軸とするような円筒座標系で考える。

磁界は、内導体の内部において $\mathbf{H} = (I\rho/2\pi a^2)\mathbf{a}_\phi$ となり、

内外導体間において $\mathbf{H} = (I/2\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$ となる。

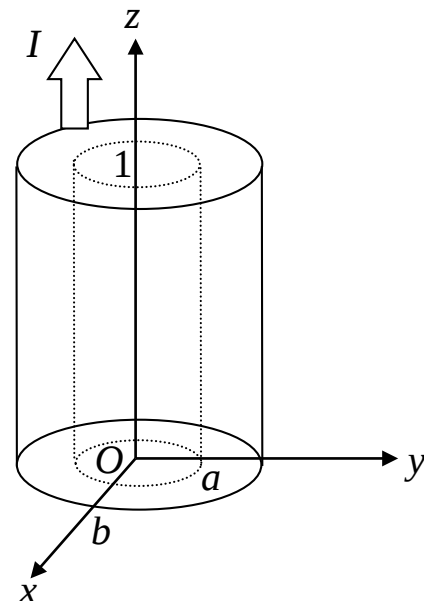
これらから、同軸ケーブルの単位長さ当りの磁氣的蓄積エネルギーは

$$\begin{aligned}
 W_m &= \iiint_v \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 dv = \frac{\mu_0}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{I\rho}{2\pi a^2} \right)^2 \rho d\rho d\phi dz \\
 &\quad + \frac{\mu}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi\rho} \right)^2 \rho d\rho d\phi dz \\
 &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^4} \int_0^a \rho^3 d\rho + \frac{\mu I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = I^2 \left(\frac{\mu_0}{16\pi} + \frac{\mu}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \right)
 \end{aligned}$$

となるから、自己インダクタンスは

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

と与えられる。



9.3 仮想変位と磁界の及ぼす力

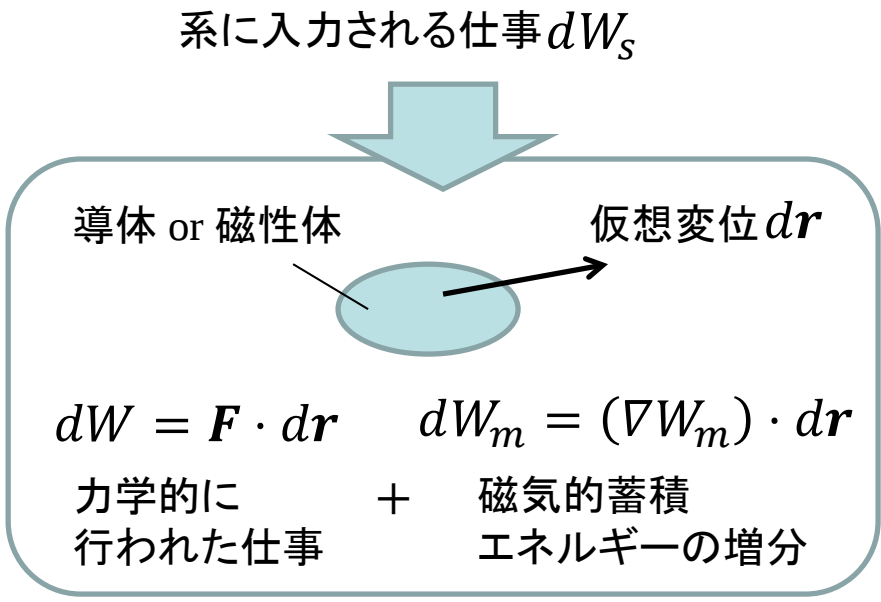
仮想仕事の原理

磁界内で、導体 or 磁性体が $d\mathbf{r}$ の仮想変位をした場合、系のエネルギー収支の変化分に着目する。

$$dW_m + dW = dW_s \quad (9.32)$$

あるいは

$$(\mathbf{F} + \nabla W_m) \cdot d\mathbf{r} = dW_s \quad (9.33)$$



(1) 系に対する入力エネルギーが存在しない場合 $dW_s = 0$

$$\mathbf{F} = -\nabla W_m \quad (9.34)$$

(2) 各物体 i に流れる電流 I_i が一定である場合 ($I_i = \text{一定}$)

$$W_m = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} L_i I_i^2$$

$$\begin{aligned} dW_s &= \sum_{i=1}^n I_i d\Lambda_i = \sum_{i=1}^n I_i d(L_i I_i) = \sum_{i=1}^n I_i^2 dL_i = d\left(\sum_{i=1}^n L_i I_i^2\right) = d(2W_m) \\ &= 2dW_m \end{aligned}$$

(2) 各物体 i に流れる電流 I_i が一定である場合 ($I_i = \text{一定}$) (続き)

$$\mathbf{F} = \nabla W_m \quad (9.35)$$

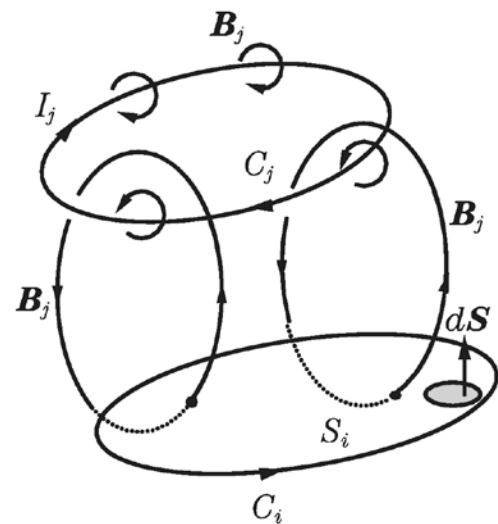
(3) 相互インダクタンスと電流間に作用する力の関係

■ 閉曲線 C_i および C_j における磁氣的蓄積エネルギー

$$W_m = \frac{1}{2} L_{ii} I_i^2 + L_{ij} I_i I_j + \frac{1}{2} L_{jj} I_j^2 \quad (9.36)$$

■ 閉曲線 C_i および C_j に流れる電流の間に作用する力
(仮定: 閉曲線 C_i および C_j の形状は不変)

$$\mathbf{F} = \nabla W_m = \nabla \left(\frac{1}{2} \underbrace{L_{ii}}_{\text{定数}} I_i^2 + L_{ij} I_i I_j + \frac{1}{2} \underbrace{L_{jj}}_{\text{定数}} I_j^2 \right) = I_i I_j \nabla L_{ij} \quad (9.37)$$



例題9.3 一様な電流 I_1 が z 軸に沿って流れている。また、 z 軸から d の位置に固定された一辺 a の正方形ループに沿って一様な電流 I_2 が流れている。相互インダクタンスの勾配を計算し、正方形ループに作用する力を求めよ。

【解答】相互インダクタンス M : (例題8.4で d を y に置換)

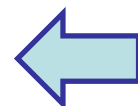
$$M = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{y+a}{y} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \{\ln y - \ln(y+a)\}$$

正方形ループに作用する力:

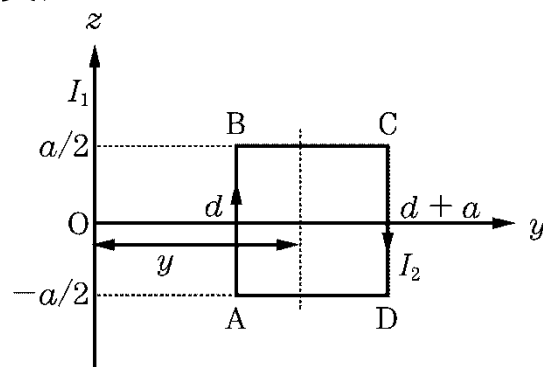
$$\mathbf{F} = I_1 I_2 \nabla M = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial y} \mathbf{a}_y = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) \mathbf{a}_y$$

y を d に置換

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) \mathbf{a}_y$$



例題8.1の結果に一致



9.4 変位電流

(1) 変位電流の導入

■これまで学習してきた電磁気に関する法則の微分形

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v \\
 \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \\
 \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \\
 &\text{ベクトル恒等式 (B.22)}
 \end{aligned}$$

⇒ 上式は ρ_v が時刻 t の関数でないことを示す

疑問：一般に ρ_v が時刻 t の関数でない
ということとはあり得ないはず



そもそも $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ は正しいのか？

$$\left(\begin{aligned}
 &\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ の類似性から} \\
 &\nabla \times \mathbf{H} \text{ の右辺に } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \text{ が含まれるのでは？}
 \end{aligned} \right)$$

■ 『 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 』 $\Rightarrow$ 『 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}$ 』

$$\begin{array}{l}
 \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \\
 \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \\
 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G} \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\
 \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \\ \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{G}) \\
 \text{ベクトル恒等式 (B.22)} \\
 = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{G} \\
 = -\frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{G} \\
 = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{G} \right)
 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} : \text{変位電流密度}$

■ アンペア・マクスウェルの法則(微分形)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9.49)$$

■ アンペア・マクスウェルの法則(積分形)

※ 微分形(9.49)を面積分し, ストークスの定理を適用(各自で確認せよ)

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = I_{\text{net through } S} + \underline{I_d} \quad (9.50)$$

変位電流

(1864年, マクスウェル
により導入された)

■ 変位電流 I_d の定義:
$$I_d = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.51)$$

(2) 空間を伝わる変位電流

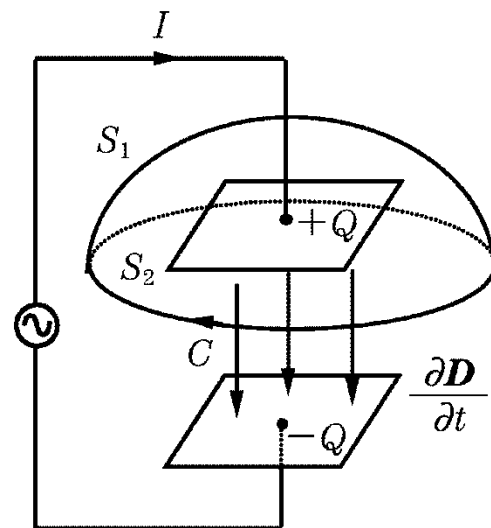
※ 導体が存在しなくても, 電束密度の時間的な変化により, **変位電流は空間を流れる**

■ コンデンサに流れる電流の例

- ・ **直流**: 電束密度が時間的に変化しないので,
コンデンサの極板間に変位電流は流れない
- ・ **交流**: 電束密度が時間的に変化するので,
コンデンサの極板間に変位電流は流れる

⇒ $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$

⇒ $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0$



■ 平行平板コンデンサの回路に流れる導電電流 I と
極板間における変位電流 I_d が等しいこと

- 導線を流れる導電電流

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \rho_s dS \quad (9.52)$$

- 極板間における変位電流

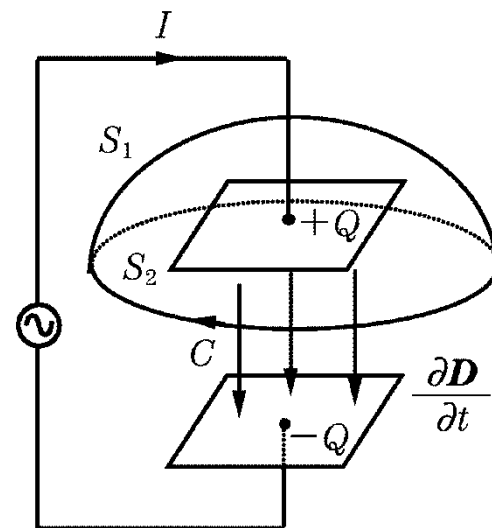
$$I_d = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n dS \quad (9.54')$$

- 極板における面電荷密度 ρ_s と電束密度 $\mathbf{D}$ の関係〔クーロンの定理(5.9)〕

$$\rho_s = \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n$$

- 以上から

$$I_d = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n dS = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \rho_s dS = I \quad (9.54'')$$



9.5 マクスウェルの方程式

(1) マクスウェルの方程式の微分形

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.55a) \quad \text{ファラデーの電磁誘導の法則}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9.55b) \quad \text{アンペア・マクスウェルの法則}$$

マクスウェルの
回転方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (9.55c) \quad \text{(電界に関する)ガウスの法則}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.55d) \quad \text{(磁界に関する)ガウスの法則}$$

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (9.55e)$$

(2) 構成関係

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (9.56a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (9.56b)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{E} \quad (9.56c)$$

(外部から与えられた)印加電流密度:電磁界の源

例題9.4 マクスウェルの回転方程式(9.55a), (9.55b) と連続の式(9.55e)からガウスの法則の微分形(9.55c), (9.55d)を導出せよ。

【解答】ベクトル恒等式(B.22) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ から

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = \frac{\partial}{\partial t} (-\rho_v + \nabla \cdot \mathbf{D}) \end{aligned}$$

これらを時間積分し, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (9.55d) および $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ (9.55c) を得る。

(3) マクスウェルの方程式の積分形

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.57a) \quad \text{ファラデーの電磁誘導の法則}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (9.57b) \quad \text{アンペア・マクスウェルの法則}$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_v dv \quad (9.57c) \quad \text{(電界に関する)ガウスの法則}$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9.57d) \quad \text{(磁界に関する)ガウスの法則}$$

※ ガウスの発散定理・ストークスの定理を利用して、微分形から積分形
あるいは積分形から微分形を導くことができる(各自で確認せよ)

(4) 境界条件

① 電界の接線成分は等しい。

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0} \quad (9.58a)$$

② 磁界の接線成分は境界に流れる面電流密度 $\mathbf{J}_s$ の分だけ不連続である。

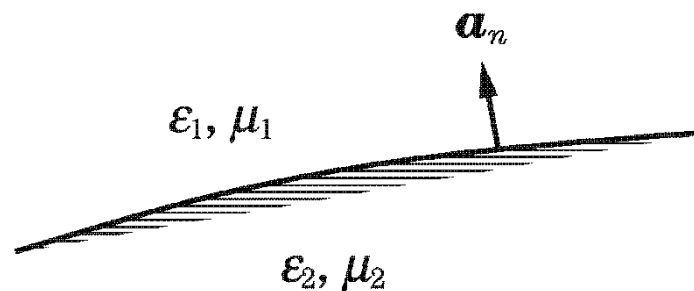
$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (9.58b)$$

③ 電束密度の法線成分は境界の面電荷密度 ρ_s の分だけ不連続である。

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (9.58c)$$

④ 磁束密度の法線成分は等しい。

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (9.58d)$$



9.6 ポインティングベクトル

(1) ポインティング定理

ベクトル恒等式 (B.16)

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &= \mathbf{H} \cdot \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0 \end{aligned}$$

上式を領域 v で体積分し、ガウスの発散定理を適用する

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv$$

$$\oiint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial W_e}{\partial t} - \frac{\partial W_m}{\partial t} - P_l - P_s$$

 (9.59)

ポインティング定理

ただし

$$W_e = \iiint_v \frac{\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{2} dv = \iiint_v \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} dv$$

電氣的蓄積エネルギー

$$W_m = \iiint_v \frac{\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{2} dv = \iiint_v \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} dv$$

磁氣的蓄積エネルギー

$$P_l = \iiint_v \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv$$

ジュール損

$$P_s = \iiint_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0 dv$$

供給電力

ポインティング定理

$$\oint\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial W_e}{\partial t} - \frac{\partial W_m}{\partial t} - P_l - P_s \quad (9.59)$$

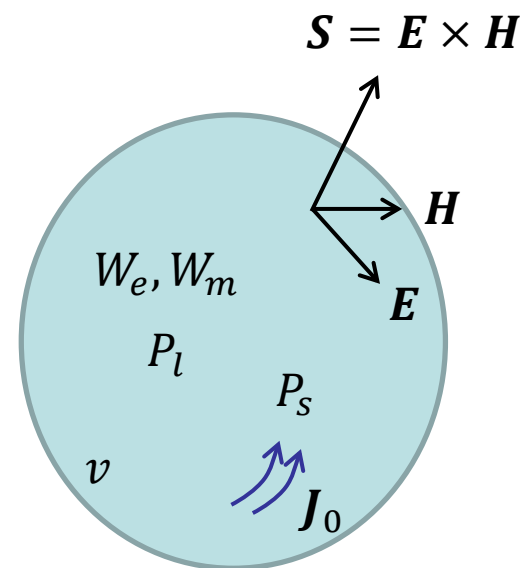
領域 v の境界面 S から流出する
単位時間当たりのエネルギー

(2) ポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (9.61)$$

電磁界の電力密度ベクトル

- ・ $\mathbf{S}$ の大きさ: 単位面積当りの電力
- ・ $\mathbf{S}$ の向き: エネルギーの進む向き



■ ポインティング定理(書換)

$$\oint\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial (W_e + W_m)}{\partial t} - P_l - P_s \quad (9.59')$$

※ ポインティングベクトル $\mathbf{S}$ を面積ベクトルの $\mathbf{S}$ と混同しないように注意せよ。