参考文献：寺田，木村，吉田，岡田，佐藤亨，大学課程情報通信工学，オーム社，H5

１．伝達関数とインパルス応答

線形で時間不変のシステム L を考える．このシステムに $f(t)$ を入力として加えたとき，出力が $g(t)$ であることを

$$L\left[f(t)\right]=g(t) \qquad (1.1)$$

と表すものとする．（図１）

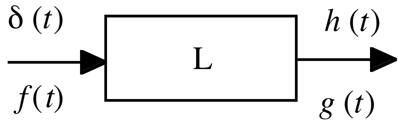

図１　線形時間不変システム

システムが線形であるということは，任意の関数 $f_1(t), f_2(t)$ について

$$L\left[a\,f_1(t)+b\,f_2(t)\right]=a\,g_1(t)+b\,g_2(t) \qquad (1.2)$$

が成り立つことであり，時間不変であるとは

$$L\left[f(t-t_0)\right]=g\,(t-t_0) \qquad (1.3)$$

が任意の t_0 に対して成り立つことである．

このシステムに単位インパルス関数 $\delta\,(t)$ を入力したときの出力（単位インパルス応答）を $h\,(t)$ とする．

$$L\left[\delta\,(t)\right]=h\,(t) \qquad (1.4)$$

任意の入力に対する出力は $h\,(t)$ を用いて計算できる．

システムの線形性により，入力を時間について x だけ移動し，$f(x)$ 倍すると

$$L\left[f(x)\,\delta(t-x)\right]=f(x)\,h(t-x) \qquad (1.5)$$

が成り立つ．これをあらゆるについて加え合わせると

$$L\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(t-x)\,dx\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,h(t-x)\,dx \qquad (1.6)$$

となる．左辺は $L\left[f(t)\right]$ と等しい．これはまた(1.1)より $g(t)$ に等しいから，結局

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,h(t-x)\,dx=f(t)\otimes h(t) \qquad (1.7)$$

と表すことができる．つまり，**線形で時間不変システムの出力は入力と伝達関数のたたみ込み積分で与えられる．**

$h(t)$ のフーリエ変換を $H(\omega)$ とすると，たたみ込み積分の性質から

$$G(\omega) = F(\omega)\, H(\omega) \tag{1.8}$$

となる．この $H(\omega)$ をそのシステムの伝達関数(Transfer Function)と呼ぶ．この式から，線形時間不変システムとは，入力信号の各周波数成分を $H(\omega)$ 倍または減衰させるシステムであることがわかる．通信システムにおいては波形のひずみを最小限に抑えることが重要である．非線形なシステムでは高調波の発生がひずみの主原因になるが，線形なシステムにおいても伝達関数の周波数特性によってはひずみが発生する．

入力信号 $f(t)$ と出力信号 $g(t)$ の間に

$$g(t) = k\, f(t - t_d) \tag{1.9}$$

の関係が成り立つとき，入力信号波形が保存される．これを**無ひずみ伝送**という．この条件は周波数領域では，

$$G(\omega) = k\, F(\omega)\, e^{-j\omega t_d} \tag{1.10}$$

と表現される．したがって，無ひずみ伝送の条件はシステム伝達関数 $H(\omega)$ が周波数に対し

$$|H(\omega)| = k \qquad \angle H(\omega) = \omega\, t_d \tag{1.11}$$

を満たすこと，すなわち周波数に対して振幅が平坦であり，位相が直線的に変化することである．

2. 理想フィルタ

線形時間不変システムの代表的なものはフィルタである．フィルタは必要とする周波数成分だけを取り出すために使われる．その中で理想フィルタがある．これはある周波数の信号のみをそのまま通過させ，それ以外の周波数成分を完全に減衰させるものである．例えば，理想低域フィルターの伝達関数は周波数領域で

$$H(\omega) = \begin{array}{ll} 1 & (|\omega| < \omega_L) \\ 0 & (|\omega| > \omega_L) \end{array} \tag{2.1}$$

と表される．ここで ω_L を低域遮断周波数と呼ぶ．

この伝達関数の時間領域での表現は前節で求めたゲート関数とSinc関数の関係と同様に逆フーリエ変換から求められる．

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_L}^{\omega_L} \exp(j\omega t)\, d\omega = \frac{\omega_L}{\pi} \frac{\sin(\omega_L t)}{\omega_L t} \tag{2.2}$$

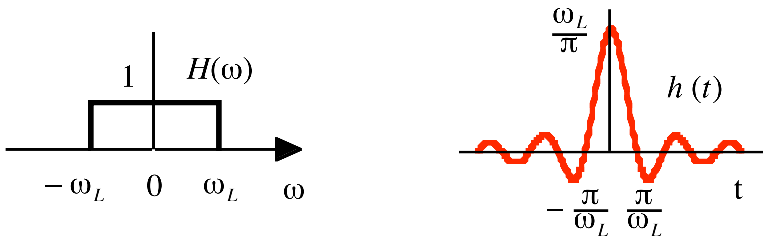

図２　理想低域通過フィルタの周波数特性とインパルス応答

図２に理想低域通過フィルタの周波数特性とインパルス応答を示す．しかし，この式の形からわかるように $h(t)$ は偶関数であり，$t<0$ の領域にも応答をもつ．

単位インパルス関数は $t \neq 0$ では常に０であるから，このことは理想低域通過フィルタでは入力が加わる前に出力が現れることを意味する．このように $t<0$ で０でないインパルス応答をもつシステムは因果的でないシステムと呼ばれ，実現不可能である．

しかし，式(1.9)に示されるように，群遅延は波形を変化させないので，一般に大きな遅延時間 t_d を与えれば，因果的なシステムで因果的でないシステムと同じ特性を実現することは可能である．ただし，理想フィルタの場合は - ∞ の時間から０でない出力をもつので，いくら大きな t_d を与えてもその特性を厳密に実現することはできない．実際には次項に述べる窓関数を用いてインパルス応答を有限の時間で打ち切ることにより，その特性を近似する必要がある．

3. 窓関数

ゲート関数のように，有限の時間範囲 T の中でだけ0でない値をとる関数を窓関数（window function）と呼ぶ．現実の信号処理で取り扱うことができる信号は有限長であることが多いので，窓関数は重要な働きをする．

ある信号 $f(t)$ に窓関数似 $w(t)$ を乗じることは，周波数領域ではそれぞれのフーリエ変換 $F(\omega)$ と $W(\omega)$ のたたみ込み積分を行うことに相当する．周波数推移の性質から，単一周波数 ω_0 の信号を人力として加えたときの出力は，伝達関数を ω_0 を中心とする位置に移動した特性となる．したがって $W(\omega)$ の形状から，ある周波数成分が他の周波数にどのように漏れ込むかを，評価することができる．

図3は矩形窓（ゲート関数）とその振幅周波数特性の対数表示である．信号処理で取り扱うデータ量を短くするためには，窓関数の時間幅 T を小さくすることが望ましい．しかし，フーリエ変換の相似性により周波数応答が広がり，周波数特性におよぼす影響は大きくなる．したがって，限られた時開幅でなるべく不要な周波数応答を抑えた特性を持つものが良い窓関数である．

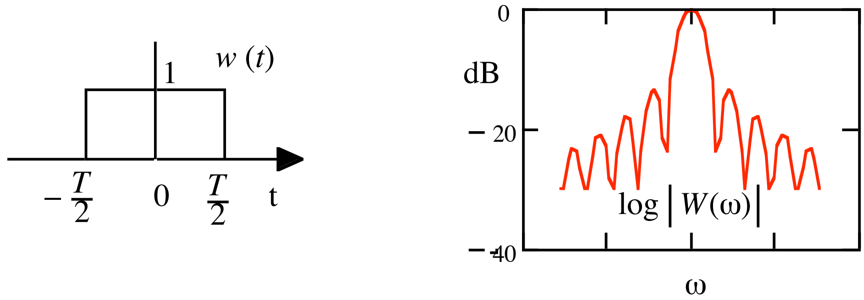

図3　矩形窓とその対数振幅周波数特性

窓関数は，この他にもきわめて多数の種類が考案されており、用途に応じて使い分けられている．たとえば、矩形窓は不要応答（サイドローブの大きさ）が他の窓関数に比べて大きいため，強度比が30dB以上の複数の信号を識別しなければならない場合には適さない．しかし周波数応答（メインローブ）の幅は最も狭いため，互いに周波数が近接して，振幅が同程度の２つの信号を識別するような場合には適している．一方，ハニング窓は時間領域の関数形をなめらかにすることにより，高い周波数領域での不要応答（サイドローブ）を小さくできるように作られている．しかし，メインローブ幅は，矩形窓に比べて広がる．これは，時間領域における実効的な窓関数の幅が狭くなっていることによる．メインローブ幅は周波数応答が最初に0になるまでの幅あるいは電力が半分になる幅（電力半値幅）のことをいう．

メインローブ幅とサイドローブの大きさはトレードオフの関係にある．メインローブ幅は分解能に該当する．方形窓が最もシャープであり，その分解能を１とすると，次にHanning，Hamming，Kaiserの順となっている．分解能とサイドローブレベルの関係では，HanningとHammingは同じ分解能であるが，Hammingの方がサイドローブレベルが小さいのでよく使われる．また，パラメータによって分解能を可変できるKaiser窓もよく使われている．

代表的な窓関数

窓名称	関数形	サイドローブ	メインローブ幅
矩形	$W(x) = \Pi(x)$	- 13 dB	1
Hanning	$W(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	- 32 dB	2
Hamming	$W(x) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	- 41 dB	2
Kaiser	$W(x) = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-x^2}\right)}{I_0(\beta)}$	- 46 ($\beta = 2\pi$)	$\sqrt{5}$

4. パワースペクトルと自己相関関数

電圧信号 $f(t)$ を1Ωの抵抗負荷に加えたとき消費される全エネルギーは

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt \tag{4.1}$$

で与えられる．式(4.1)の右辺が有限の値を持つ信号をエネルギー信号（energy signal)と呼ぶ．有限の振幅を持ち，有限時間だけ持続する信号は**エネルギー信号**である．

これに対して，正弦波のように無限の時間にわたって定常的に持続する信号は，この条件を満たさない．この場合は，全エネルギーのかわりに単位時間あたりの消費エネルギーである平均電力

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\, dt \tag{4.2}$$

を用いる．式（4.2）の右辺が有限の値を持つ信号を電力信号（power signal)と呼ぶ．有限振幅の定常不規則信号は電力信号である．

通信システムでは，信号を定常不規則信号として取り扱うことが多い．信号は時々刻々変化するが信号の性質は一定と見なされる．そこで，以下では主に電力信号について議論する．

パーセバルの定理は電力信号の場合についても成り立つので，式（4.2）は

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \to \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega \end{aligned} \tag{4.3}$$

と表すことができる．ここで

$$S(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T} \tag{4.4}$$

は電力を周波数スペクトルに分解したものと考えられるので，**パワースペクトル密度**と呼ぶ．

次に、このパワースペクトル密度の時間領域における表現を考える．式(4.4)を逆フーリエ変換すると

$$F^{-1}[S(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega)\, F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

となり，ここで時間たたみ込みとフーリエ変換の性質

$$F\left[f(t) \otimes g(t) \right] = F(\omega)\, G(\omega) \qquad\qquad f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$$

を用いると

$$F^{-1}\left[S(\omega) \right] = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left[f(-t) \otimes f(t) \right]$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(-x)\, f(t-x)\, dx$$

となる．ここでは，たたみ込み積分の範囲が $-T/2 < x < T/2$ となっていることに注意が必要である．本来たたみ込み積分の積分区間は -∞ から ∞ であるが，上式では発散を防ぐため，まず有限の区間 $-T/2 < x < T/2$ で積分を行い，次にT→ ∞としている．

さらに t を τ，- x を t と置き換えると，結局

$$R(\tau) \equiv F^{-1}\left[S(\omega) \right] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, f(t+\tau)\, dt \tag{4.5}$$

が得られる．$R(\tau)$は，ある信号とそれを τ だけ遅らせた信号との相関を意味するので，**自己相関関数**（**auto-correlation function**）と呼ぶ．また，このときの τ を時間遅れ（time lag）という．

式(4.5)の関係は，ある信号のパワースペクトル密度と自己相関関数が同一の関数の異なる領域における表現であることを表しており，**ウィナー・ヒンチンの定理**（Wiener-Khintchine's theorem）と呼ばれる．

式(4.5)より

$$R(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega \tag{4.6}$$

であることがわかる．つまり自己相関関数の時間遅れ0における値は，その信号の平均電力を表す．

5. 不規則信号の解析

通常のフーリエ変換 $F(\omega)$ とパワースペクトル密度 $S(\omega)$ の違いは，$S(\omega)$ が信号の各周波数成分の位相に関する情報を含まないことである．そのフーリエ逆変換である自己相関関数 $R(\tau)$ についても式(4.5)の右辺で $f(t)$ を任意の時間だけ移動した $f(t-t_0)$ に置き換えても結果は変わらないことが明らかである．

すなわち，$S(\omega)$ や $R(\tau)$ は，ある時間軸に固定された信号の具体的波形を表現するのではなく，その信号に含まれる周波数成分の統計的分布を表す関数であるといえる．この考え方は，特に不規則信号の解析において重要である．

不規則信号のある時刻における観測値 $f(t)$ は，未知の母集団の 1 つの標本値であると考えられる．この母集団の統計的性質は，多数の観測を繰り返すことによって推定することができる．たとえば各時刻における平均値 $\mu(t)$ は

$$\mu(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i(t) \tag{5.1}$$

で与えられる．同様に自己相関関数は

$$R(t,\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i(t)\, f_i(t+\tau) \tag{5.2}$$

で定義される．ここで添え字 i は，同一の条件における独立な観測の i 回目を意味する．このような平均を**アンサンブル平均**（ensemble average）と呼ぶ．信号が定常であるとは，μ や R がtに対して不変であることをいう．

実際の信号処理においてアンサンブル平均をとることは必ずしも容易ではないが，定常不規則信号は，多くの場合アンサンブル平均を時間平均で置き換えることができるという性質を持つ．この性質を持つ信号を，**エルゴード的**（ergodic）であるという．このとき平均値は

$$\mu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt \tag{5.3}$$

で与えられる．また，式(5.3)で定義される自己相関関数は式(4.5)によるものに一致する．

定常不規則信号のもっとも簡単な例としては，白色雑音（white noise）$n(t)$ があげられる．白色雑音は，異なる時間における値が互いに相関を持たない不規則信号である．したがって，その自己相関関数はデルタ関数であり，パワースペクトル密度は周波数によらず一定となる．

$$R_n(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t)\, n(t+\tau)\, dt = C\,\delta(\tau) \tag{5.4}$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, dt = C \tag{5.5}$$

白色雑音の名前は、白色光が平坦な周波数スペクトルを持つことに由来する．ただし，上式と式（4.3）からわかるように、純粋な白色雑音はその振幅が有限であっても平均電力は無限大となる．現実の白色雑音は有限の周波数帯域内でのみ，平坦な周波数特性を持ち得る．

単位インパルス関数も白色雑音とおなじ平坦なパワースペクトル密度を持つが、その時間波形はまったく異なる．この違いは，単位インパルス関数はその周波数成分が時間0ですべて同位相であるのに対して，白色雑音は各周波数成分の位相がランダムであることによる．

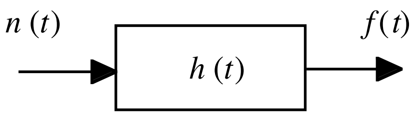

図5　白色雑音と線形時間不変システムによる定常不規則信号のモデル

一般の定常不規則信号は，図5のように，白色雑音をある伝達関数 $H(\omega)$ を持つ線形時間不変システムに加えた場合の出力によって，近似することができる．このとき入力となる白色雑音はランダムな位相特性を持つため，伝達関数がどのような位相周波数特性を持っていても，出力される信号の統計的性質はおなじである．したがって，このようなモデルの性質は，出力信号のパワースペクトトル密度（または自己相関関数）によって、完全に記述できる．

参考文献：寺田，木村，吉田，岡田，佐藤亨，大学課程情報通信工学，オーム社，H5 のなかで，第３章，佐藤亨先生担当，を主に参考にした．