

標 本 化

自然界における信号，人間が接する信号は連続量である．通信で，連続量をそのまま伝送することは困難であり，さまざまな雑音やひずみの影響を受ける．デジタル通信方式はこれらの問題を解決する技術として開発され，今日では通信方式の主流となっている．ここでは，デジタル化の第1段階である信号の標本化について述べる．

標本化定理

標本化 (sampling) とは，連続関数を時間軸上で離散的な関数によって代表させることである．一般には，離散的な関数で連続関数の持っていた情報をすべて表すことは不可能であるが，ある条件のもとではこれが可能となる．これを示すのが以下に述べる標本化定理である．

簡単のため，ここでは離散的な信号として等間隔のものだけを考える．実際上も不等間隔の離散的信号が用いられることはほとんどないので，これは大きな制約とはならない．

ある関数 $f(t)$ を一定の時間間 T_s で標本化するという操作は， $f(t)$ に単位インパルス列

$$\delta_s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT_s) \quad (1.1)$$

を乗じることである．これを用いると，標本化された信号は

$$f_s(t) = f(t) \delta_s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(iT_s) \delta(t - iT_s) \quad (1.2)$$

と表される． $\delta_s(t)$ は周期関数であるから，フーリエ級数に展開することができる．指数フーリエ級数の形式を用いると，その係数 c_n は $1/T_s$ となるから

$$\delta_s(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \quad (1.3)$$

と表せる．ここで， $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ である．

周波数推移の関係式より $e^{jn\omega_s t}$ のフーリエ変換は $2\pi\delta(\omega - n\omega_s)$ で与えられるので， $\delta_s(t)$ のフーリエ変換は

$$\Delta_s(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (1.4)$$

となる．すなわち，単位インパルス列のフーリエ変換はやはり単位インパルス列であり，周波数領域における間隔は時間領域における間隔の逆数である ($f_s T_s = 1$)．

標本化された信号 $f_s(t)$ のフーリエ変換 $F_s(\omega)$ は周波数たたみ込みの性質により

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes \Delta_s(\omega) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (1.5)$$

と表される。すなわち、標本化された信号のフーリエ変換は元の信号のフーリエ変換を $1/T_s$ 倍し、 ω_s ずつ移動して無限に加え合わせたものである。上式から容易にわかるように、 $F_s(\omega)$ は ω_s を周期とする周期関数である。

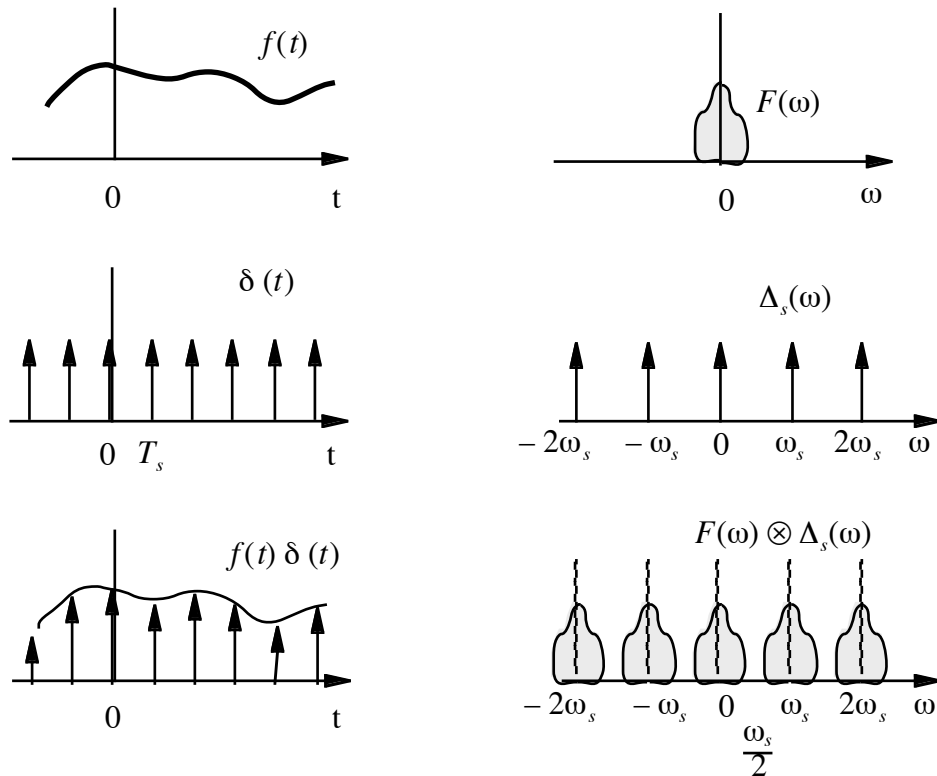


図1 信号の標本化とその周波数領域における効果

標本化の操作と、その周波数領域における効果を図1に示す。このとき、元の信号のフーリエ変換 $F_s(\omega)$ が $|\omega| > \omega_s/2$ で常に0であれば、級数の各項は重なり合わないことから、 $\omega_s/2$ を遮断周波数とし、 T_s 倍の利得を持つ理想低減通過フィルタ

$$H(\omega) = \begin{cases} T & (|\omega| < \omega_s/2) \\ 0 & (|\omega| > \omega_s/2) \end{cases} \quad (1.6)$$

に通すことにより、原信号 $F(\omega) = F_s(\omega) H(\omega)$ を再現することができる。これを標本化定理 (sampling theorem) という。

このフィルタの伝達関数は時間領域で

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2} \quad (1.7)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} f(t) &= f_s(t) \otimes h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ f(nT_s) \frac{\sin[\omega_s(t - nT_s)/2]}{\omega_s(t - nT_s)/2} \right\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

この様子を図2に示す。

標本化定理は、有限の周波数帯域 B [Hz] を持つ信号は $2B$ [Hz] 以上の速度 ($1/2B$ [s]以下の時間間隔) で標本化すれば、まったく情報量を失うことなく離散化できることを意味する。この限界の標本化間隔 $1/2B$ をナイキスト間隔 (Nyquist interval) とよび、 $2B$ をナイキスト周波数と呼ぶ。

ただし、ここでは単位インパルス関数や理想低域通過フィルタのように理想的な特性の関数を用いているので、このままの形では実現不可能である。実際の通信や計測の標本化ではナイキスト周波数の1.2倍程度が好ましいとされている。

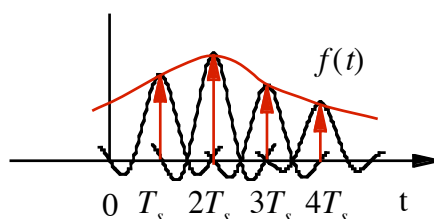


図2 標本化された信号とSinc関数による原信号の復元

エリアジング

前項では原信号が $|\omega| > \omega_s/2$ の成分を持たない場合について議論した。ここでは、この条件が満たされない場合の影響について考える。

簡単のために、原信号が単一周期信号 $f(t) = A e^{j\omega_0 t}$

であるとする。この信号のフーリエ変換は $F(\omega) = 2\pi A \delta(\omega - \omega_0)$

で与えられる。したがって、これを標本化した信号のフーリエ変換は

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad (1.9)$$

となる。

この信号を、 $\omega_s/2$ を遮断周波数とする理想低減通過フィルタに通す。これは上式の右辺各項のうち、 $|\omega| < \omega_s/2$ となる成分のみを取り出すことにあたる。このとき、たとえば $\omega_s/2 < \omega_0 < \omega_s$ とすると、復元される信号は

$$\overline{F}(\omega) \equiv F_s(\omega) H(\omega) = 2\pi A \delta(\omega - \omega_0 + \omega_s) \quad (1.10)$$

となる（図3）。これを時間領域で表すと

$$\overline{f}(t) = A e^{j(\omega_0 - \omega_s)t} \quad (1.11)$$

であり、原信号と振幅は等しいが周波数の異なる信号となることがわかる。原信号が通常の正弦波等の場合についても同様である。

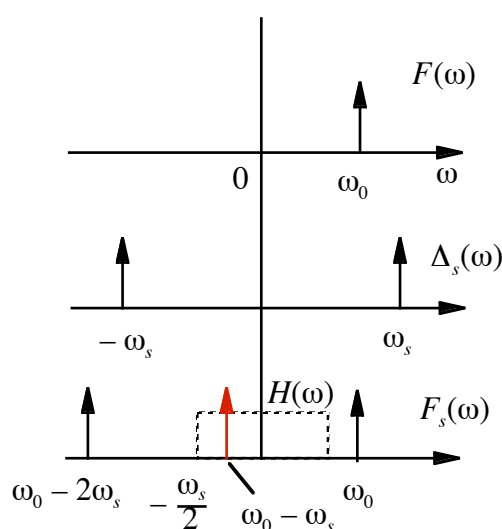


図3 単一周期信号のエイリアジング

一般に（正または負の）任意の周波数 ω_0 の信号を標本化したのち、理想低域通過フィルタによって復元したときに得られる信号の周波数は、 $\omega_0 + n\omega_s$ のうち絶対値のもっとも小さいものとなる。この現象をエイリアジング（aliasing）という。映画等で、走っている車の車輪が静止したり逆回転したりしているように見えるのは、この現象が視覚化された例である。

連続した周波数分布を持つ信号の場合は、各周波数成分について上の原理により、どの周波数に移動するかを考えて加え合わせればよい。

参考文献：寺田，木村，吉田，岡田，佐藤亨，大学課程情報通信工学，オーム社，H5のなかで，第3章，佐藤亨先生担当，を主に参考にした。