あなたの数学基礎知識は大丈夫？

以下は高校程度の数学の内容です．身についているか確認して下さい．

◆指数の性質

$a^n = a \times a \times a \times . . . \times a$　（n 個のかけ算）

$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$　　$a^0 = 1$

$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$　　$\left(ab\right)^n = a^n b^n$　　$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$　　$\left(ab\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$　　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

◆対数の性質

$\log_a 1 = 0$　　$\log_a a = 1$

$\log_a \left(mn\right) = \log_a m + \log_a n$　　$\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

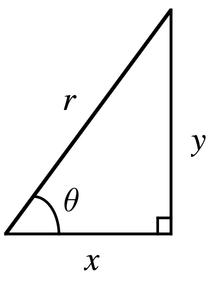
$\log_a m^n = n \log_a m$　　$\log_a \sqrt[n]{m} = \dfrac{1}{n} \log_a m$

$\log_{10} A = \dfrac{\log_e A}{\log_e 10} = 0.4343 \ln A$　　$e = 2.71828$　自然対数の底

◆等価関係

$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y$　　$1° = \dfrac{\pi}{180}\left[rad\right]$，　$1\left[rad\right] = \dfrac{180°}{\pi}$

◆三角関数



$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，　$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{y}{x}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

あなたの数学基礎知識は大丈夫？

◆三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \qquad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

◆微分

$$\frac{d}{dx}\left\{f(x)\,g(x)\right\} = \frac{df(x)}{dx}\,g(x) + f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{\dfrac{df(x)}{dx}\,g(x) - f(x)\,\dfrac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}C = 0$$ C: constant

$$\frac{dx^n}{dx} = n\,x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \qquad \frac{de^{ax}}{dx} = a\,e^{ax}$$

$$\frac{d\,\log x}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{da^x}{dx} = a^x\log a$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \qquad \frac{d\sin ax}{dx} = a\cos ax$$

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \qquad \frac{d\cos ax}{dx} = -a\sin ax$$

$$\frac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{d\tan ax}{dx} = a\sec^2 ax = \frac{a}{\cos^2 ax}$$

あなたの数学基礎知識は大丈夫？

◆積分

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt \quad , \quad g'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f'(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int C\,dx = C\,x$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int e^{nx}\,dx = \frac{1}{n}\,e^{nx}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}\,a^x$$

$$\int \log x\,dx = x\left(\log x - 1\right)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|$$

$$\int \cot x\,dx = -\log|\sin x|$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x$$

あなたの数学基礎知識は大丈夫？

大学で学習する内容

オイラーの公式　$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$　　$e = 2.71828$　自然対数の底

虚数単位　$j = \sqrt{-1}$　$j^2 = -1$　　$i = \sqrt{-1}$　$i^2 = -1$

数学，理学では i を使い，工学では j を使うことが多い.

i と j の関係は　$i = -j$

複素変数　$z = x + jy = r\,e^{j\theta} = r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)$

複素共役　$z^* = x - jy = r\,e^{-j\theta} = r\left(\cos\theta - j\sin\theta\right)$

$$x = \frac{z + z^*}{2} = r\,\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = r\cos\theta$$

$$y = \frac{z - z^*}{2j} = r\,\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = r\sin\theta$$

複素変数の三角関数

$$\sin z = \sin(x \pm jy) = \sin x\cosh y \pm j\cos x\sinh y$$

$$\cos z = \cos(x \pm jy) = \cos x\cosh y \mp j\sin x\sinh y$$

$$\tan z = \tan(x \pm jy) = \frac{\tan x \pm j\tanh y}{1 \mp j\tan x\tanh y} = \frac{\sin 2x \pm j\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

$$\cot z = \cot(x \pm jy) = \frac{1 \mp j\tan x\tanh y}{\tan x \pm j\tanh y} = \frac{\sin 2x \mp j\sinh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x}$$

$$\sinh z = \sinh(x \pm jy) = \sinh x\cos y \pm j\cosh x\sin y$$

$$\cosh z = \cosh(x \pm jy) = \cosh x\cos y \pm j\sinh x\sin y$$

$$\tanh z = \tanh(x \pm jy) = \frac{\sinh 2x \pm j\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$$

$$\coth z = \coth(x \pm jy) = \frac{\sinh 2x \mp j\sin 2y}{\cosh 2x - \cos 2y}$$

2階の線形微分方程式とその解

◆同次（斉次）線形微分方程式の場合

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+c\,y=0 \qquad (\,a\,,b\,,c\ \text{：定数})$$

のように右辺が０のときの微分方程式を2階の同次（斉次）微分方程式という.

この方程式の一般解 y は,　$D=\dfrac{d}{dx}$ として

二次方程式　$a\,D^2+b\,D+c=0$

根　$D=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

の二次方程式の解（根）の性質によって次の3つに分けられる.

（１）$b^2-4ac>0$：2次方程式の解 α,β が２つの異なる実根 $\alpha\neq\beta$ をもつとき

$$y=K_1\,e^{\alpha x}+K_2\,e^{\beta x}$$

（２）$b^2-4ac=0$：2次方程式の解 α,β が２つの重根 $\alpha=\beta$ をもつとき

$$y=\left(K_1+K_2\,x\right)e^{\alpha x}$$

（３）$b^2-4ac<0$：2次方程式の解 α,β が２つの複素数根 $\alpha=\gamma+j\zeta$, $\beta=\gamma-j\zeta$ をもつとき

$$y=e^{\gamma x}\left(K_1\cos\zeta x+K_2\sin\zeta x\right) \qquad K_1,K_2\ \text{：定数}$$

あなたの数学基礎知識は大丈夫？

◆非同次線形微分方程式の場合

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+c\,y=f(x) \qquad (a\,,b\,,c\ ：定数)$$

のように右辺が０でないときの微分方程式を2階の非同次線形微分方程式という．この方程式の一般解 y は，余関数を y_1 とし，特殊解を y_2 として

$$y=y_1+y_2$$

となる．ここで，余関数 y_1 は $f(x)=0$ として上記の同次線形微分方程式と同様に求められる．特殊解は $f(x)$ の形によって次のように分けられる．

$f(x)=a_0$ のとき　　$y_2=A$

$f(x)=a_0+a_1x$ のとき　　$y_2=Ax+B$

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ のとき　　$y_2=Ax^2+Bx+C$

$f(x)=e^{kx}$ のとき　　$y_2=Ae^{kx}$

$f(x)=x\,e^{kx}$ のとき　　$y_2=\left(Ax+B\right)e^{kx}$

$f(x)=k\sin x$ のとき　　$y_2=A\sin x+B\cos x$

$f(x)=e^{kx}\sin x$ のとき　　$y_2=e^{kx}\left(A\sin x+B\cos x\right)$

ベクトル公式一覧表

ベクトル演算

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

演算子

$\nabla(\phi+\psi) = \nabla\phi+\nabla\psi$ $\qquad$ $\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\,\psi+\phi\,(\nabla\psi)$

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{(\nabla\phi)\,\psi-\phi\,(\nabla\psi)}{\psi^2}$$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ $\qquad$ $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A}+\phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

$\nabla\cdot\nabla = \nabla^2$ $\qquad$ $\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$

$\nabla\times\nabla\phi \equiv \boldsymbol{0}$ $\qquad$ $\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\,\nabla\times\boldsymbol{A}+(\nabla\phi)\times\boldsymbol{A}$

$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) \equiv 0$ $\qquad$ $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$

$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$

ガウスの定理

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dv$$

ストークスの定理

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

グリーンの定理

$$\oint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \left(\nabla\phi\cdot\nabla\psi+\phi\,\nabla^2\psi\right)dv$$

$$\oint_S (\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \left(\phi\,\nabla^2\psi-\psi\,\nabla^2\phi\right)dv$$

座標系

直角座標 $\qquad$ $\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{a}_x+A_y\,\boldsymbol{a}_y+A_z\,\boldsymbol{a}_z$

$$\nabla\phi = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

あなたの数学基礎知識は大丈夫？

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

円筒座標　$\boldsymbol{A}=A_\rho\,\boldsymbol{a}_\rho+A_\varphi\,\boldsymbol{a}_\varphi+A_z\,\boldsymbol{a}_z$

$$\nabla\phi=\boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial\phi}{\rho\,\partial\varphi}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right)+\frac{\partial A_\varphi}{\rho\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\rho\left(\frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\boldsymbol{a}_z\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right)-\frac{\partial A_\rho}{d\varphi}\right]$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_\rho & \rho\,\boldsymbol{a}_\varphi & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho\,A_\varphi & A_z\end{vmatrix}$$

球座標　$\boldsymbol{A}=A_r\,\boldsymbol{a}_r+A_\theta\,\boldsymbol{a}_\theta+A_\varphi\,\boldsymbol{a}_\varphi$

$$\nabla\phi=\boldsymbol{a}_r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\boldsymbol{a}_\theta\frac{\partial\phi}{r\,\partial\theta}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(A_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,A_\varphi\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]+\boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\,A_\varphi\right)\right]$$

$$+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,A_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_r & r\,\boldsymbol{a}_\theta & r\sin\theta\,\boldsymbol{a}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & r\,A_\theta & r\sin\theta\,A_\varphi\end{vmatrix}$$