

整合負荷の条件と最大供給電力

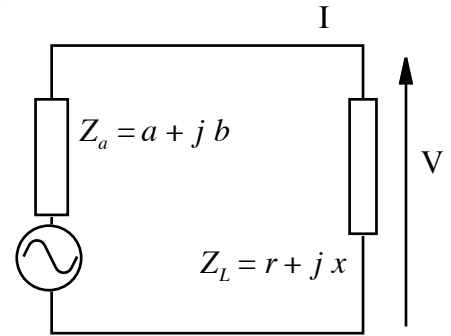
電源回路の無負荷時の出力電圧を V_0 、電源回路の等価インピーダンスを

$$Z_a = a + j b$$

とする。これに負荷インピーダンス

$$Z_L = r + j x$$

がつながれているときに、負荷インピーダンス Z_L に供給される電力を考えよう。1周期にわたる平均電力は回路理論から与えられるように、負荷端子での電圧を V 、流れる電流を I とすれば次式で与えられる。



$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (V I^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (|I|^2 Z_L)$$

$$\text{ここで、} \quad I = \frac{V_0}{r + a + j(x + b)} \quad \text{だから} \quad |I|^2 Z_L = \frac{|V_0|^2 (r + jx)}{(r + a)^2 + (x + b)^2}$$

したがって、電力として次の表現式が得られる。

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (|I|^2 Z_L) = \frac{|V_0|^2}{2} \frac{r}{(r + a)^2 + (x + b)^2}$$

この最大値を求めるために Z_L を変数として偏微分する。

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{|V_0|^2}{2} \frac{(r + a)(a - r) + (x + b)^2}{[(r + a)^2 + (x + b)^2]^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{|V_0|^2}{2} \frac{-2(x + b)r}{[(r + a)^2 + (x + b)^2]^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{より} \quad r = a \quad (\geq 0), \quad x = -b$$

すなわち、負荷に供給される電力を最大にする負荷インピーダンス Z_L は

$$Z_L = a - j b = (a + j b)^* = Z_a^*$$

となる。 $*$ は複素共役を表す。このインピーダンスを整合負荷という。すなわち、整合負荷の条件は、電源回路の等価インピーダンスの複素共役値となることである。

このとき、負荷に供給される電力は

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(|I|^2 Z_L \right) = \frac{|V_0|^2}{8a}$$

となって、無負荷電圧の2乗を電源インピーダンスの抵抗分 a の8倍で割ったものに等しい。下の図は $a=1$ ， $b=-1$ としたときの負荷インピーダンス Z_L に供給される電力を示したものである。 $a=1$ ， $b=1$ の時に最大となっていることがわかる。

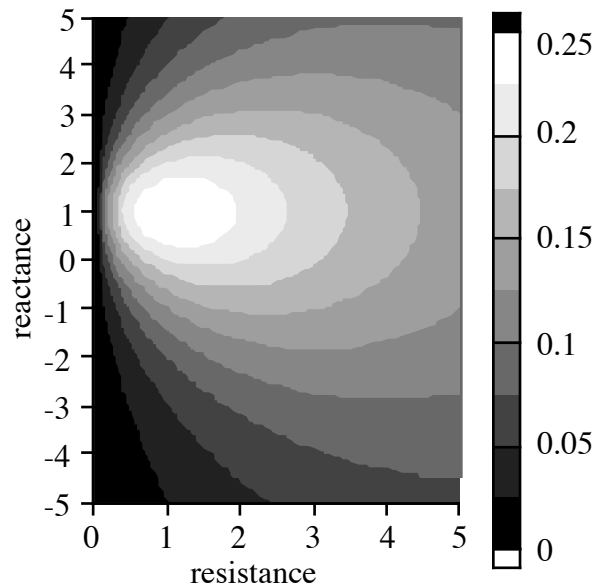


図2 負荷インピーダンスと負荷への供給電力

整合フィルタ

信号を受信する際には、信号対雑音比を最大にすることが望ましい。各種の通信方式やレーダにおける最適設計として欠かすことのできないものである。受信器は図のようにモデル化できる。

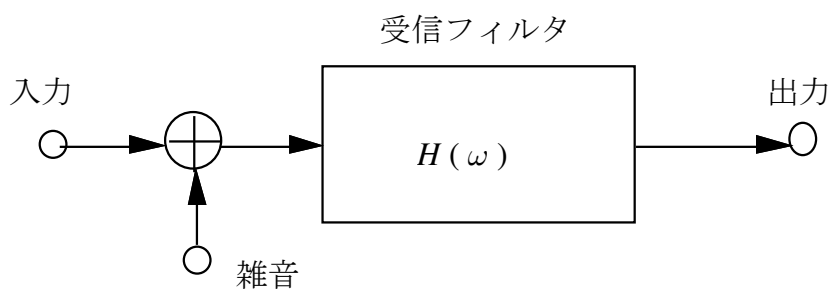


図3 受信器のモデル化

入力端子に信号を入力したとき、どのような受信フィルタを用いれば出力端子における信号対雑音比が最大になるかを知りたい。現実的な立場では、実現可能ないくつかのフィルタを仮定し、それらの周波数帯域を変化して信号対雑音比を計算し、その中から

最大のものを選ぶことも考えられるが、このような方法では厳密な最適解にはとうてい到達できそうにない。そこで、数学的に厳密に求めることを考える。白色雑音の場合、North によって厳密解が求められており、それは整合フィルタとして知られている。

O. D. North, “An analysis of the factors which determine signal noise discrimination in pulsed carrier systems,” Proc. IEEE, vol.51, no.7, pp.1016-1017, July 1963.

によって導かれた白色雑音に対する受信機の信号対雑音比が最大になる伝達関数を整合フィルタという。図4のように再度、受信系のモデルを考える。

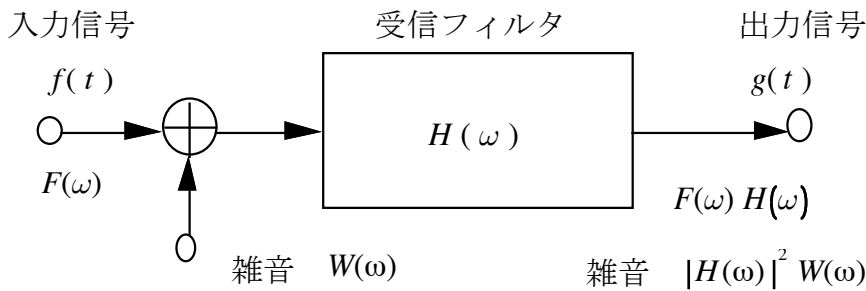


図4 雑音がある場合の受信器のモデル化

もし、時間領域の入力信号を $f(t)$ とすると、そのフーリエ変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1.1)$$

受信器の伝達関数を $H(\omega)$ とすれば、包絡線検波を行う前の出力信号は逆フーリエ変換を使って

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (1.2)$$

と表せる。一方、雑音雑音の電力スペクトル密度を $W(\omega)$ とすれば、受信フィルタ出力における雑音の電力スペクトル密度は $|H(\omega)|^2 W(\omega)$ であるので、雑音電力 N は次式で与えられる。

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W(\omega) d\omega \quad (1.3)$$

時刻 t_0 における信号電力は $|g(t_0)|^2$ であるから S/N 比は

$$\rho(t_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) \exp(j\omega t_0) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W(\omega) d\omega} \quad (1.4)$$

この最大値とその条件を求めるためにSchwartzの不等式を用いる.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) b(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |a(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |b(\omega)|^2 d\omega \quad (1.5)$$

$$\text{等号は} \quad a(\omega) = k b^*(\omega) \quad (1.6)$$

すなわち, $a(\omega)$ が $b^*(\omega)$ に比例するときに成り立つ. これを利用して

$$a(\omega) = H(\omega) \sqrt{W(\omega)}, \quad b(\omega) = \frac{F(\omega) e^{j\omega t_0}}{\sqrt{W(\omega)}} \quad (1.7)$$

とおけば,

$$\rho(t_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) b(\omega) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |a(\omega)|^2 d\omega} \quad (1.8)$$

となり, Schwarzの不等式と同じ形になる. したがって,

$$\rho(t_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |b(\omega)|^2 d\omega \quad (1.9)$$

その最大値を $\rho_{\max}$ とおけば,

$$\rho_{\max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) F^*(\omega)}{W(\omega)} d\omega \quad (1.10)$$

が得られる. また, その条件は $a(\omega) = k b^*(\omega)$

を使って

$$H(\omega) \sqrt{W(\omega)} = \frac{k F^*(\omega) e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{W(\omega)}} \quad \therefore \quad H(\omega) = \frac{k F^*(\omega) e^{-j\omega t_0}}{W(\omega)} \quad (1.11)$$

さらにそのときの周波数スペクトルは次のようになり,

$$H(\omega) F(\omega) = \frac{k F^*(\omega) F(\omega) e^{-j\omega t_0}}{W(\omega)} \quad (1.12)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k F^*(\omega) F(\omega) e^{-j\omega t_0}}{W(\omega)} \exp(j\omega t) d\omega \quad (1.13)$$

入力雑音が周波数特性を持たない白色雑音の場合、 $W(\omega) = \eta/2$ (定数) とおけるので、

$$\rho_{\max} = \frac{1}{\eta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \quad (1.14)$$

$$F(\omega) = \frac{2k}{\eta} F^*(\omega) e^{-j\omega t_0}, \quad H(\omega) F(\omega) = \frac{2k}{\eta} F^*(\omega) F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

比例定数や固定した遅延時間を見捨れば、最適受信フィルタ特性は $F^*(\omega)$ となる。これを整合フィルタと呼ぶ。すなわち、入力雑音が周波数特性を持たない場合、最大S/N比を与える整合フィルタの特性は入力信号のフーリエ変換の複素共役に比例する。雑音が白色である限り、整合フィルタは入力信号の波形に関わらず最大の信号対雑音比を与える。雑音が周波数特性を持つような場合には最適フィルタとはならない。