

参考文献：寺田，木村，吉田，岡田，佐藤亨，大学課程情報通信工学，オーム社，H5

## 1. 信号とは： 情報を伝えるのに用いられる量.

通信では信号の時間変化によって情報を伝える. 信号の中には時刻によって値が定まるものも，不確定なものもある. 例えば，信号発生器から出力されるような信号は周期的であり，時刻を指定すればその値は定まる. また，通信での信号はその時々に応じて異なる情報を伝送するので各時刻における値は不確定で確率的になる. また，生体を計測したときに得られる信号や人工衛星からのリモートセンシングデータなども不確定である. このように一口に信号といってもいろいろな種類があり，信号の種類に応じた解析方法が必要になってくる. そこで，信号を解析的な観点から次のように分類してみる.

### 1.1 解析的信号

信号を時間  $t$  の関数  $f(t)$  として表現する. 任意の時刻  $t$  を選んだとき，信号の値が一意に定まるような信号を**確定的信号**という. つまり， $t$  が与えられれば信号の値が  $f(t)$  で定まるものである. 例えば，正弦波，鋸波，矩形波，あるいはテレビの静止画像の信号等がある. これらは周期的に同じ波形を繰り返しているものである.

また，周期的ではないが， $t$  が与えられれば値が定まる単位階段関数やデルタ関数などもある. そこで，確定的信号の中で，これらを区別するためにさらに周期という観点から分類すると，**周期信号**と**非周期信号**になる.

### 1.2 周期信号

任意の時刻  $t$  について 
$$f(t) = f(t + T) \tag{1.1}$$

を満たす信号，ある周期  $T$  で同じ波形を繰り返す信号を周期信号と言う.

### 1.3 非周期信号

一方，周期信号でないものを**非周期信号**と呼ぶ. その代表的なものとして，

• Step unit function  $u_0(t)$  
$$u_0(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \tag{1.2}$$

• Dirac delta function  $\delta(t)$  
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{かつ} \quad \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \tag{1.3}$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u_0(t)$$

などがある。これらはシステムの特性や動作の解析に重要な役割を果たす。非周期信号は過渡現象の解析によく用いられることから**過渡的信号**ともいい、同じ意味を表す。

### 1.4 不規則信号

任意の時刻  $t$  を選んだとき、信号の値が不確定で確率的に定まると考えた方が都合がよい信号を**不規則信号**という。人間の音声信号などがその典型的な例である。この不規則信号の中で、その特徴となる統計的性質が時間的に変化しない場合を**定常不規則信号**、時間的に変化する場合を**非定常不規則信号**という。

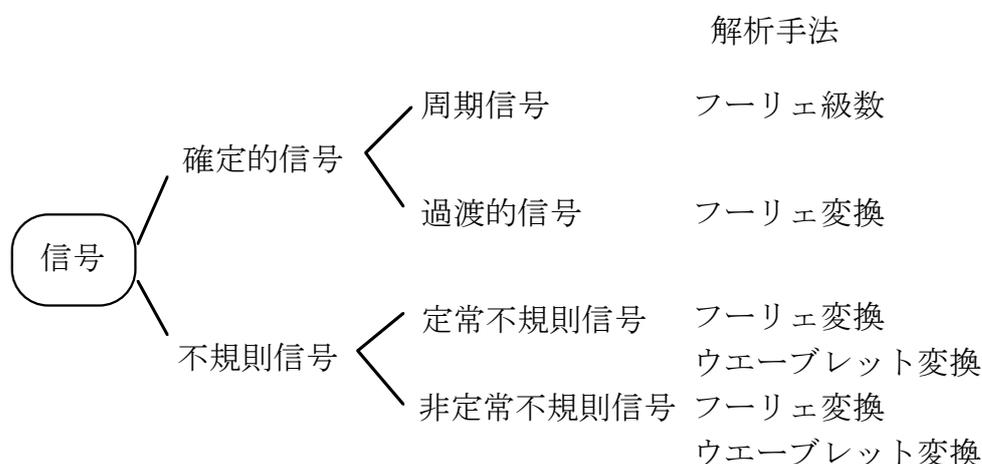


図1 信号の種類とよく使用される解析手法

図1にこれらの信号の種類とよく使用される解析手法を示した。どの信号にも関連する手法にフーリエ級数・変換がある。ここでは、まずフーリエ級数から始めよう。

## 2. フーリエ級数

今から170年以上の昔、Fourier(1768-1830, France)はどのような任意の周期関数も正弦波の級数によって表現しようと考え、それを提唱した。周期関数ということが大切で、矩形波のような不連続関数も含めて任意関数を性質の分かっている連続なsin, cos関数で表現しようとするものである。連続関数ならまだしも、不連続関数が連続関数の和で表現できるという考え方は発表当時はなかなか受け入れられなかった。しかし、このフーリエ級数、それを発展させたフーリエ変換無しには現在の理工学の発展は無かったと言える。最初の発想とそれを信念を持って貫くということがいかに大切であるかを

教えてくれる良い例である。たぶん、現在ではフーリエ変換のお世話にならない理工学系の研究者はいないであろう。

## 2.1 フーリエ級数展開

周期 $T$ の信号  $f(t)$  を正弦波の無限級数で表現することを考える。最も簡単な例から始める。まず、 $f(t)$  が奇関数  $f(-t) = -f(t)$  の場合を考える。信号が奇関数なら奇関数のみの級数で表現できるはずである。では、どのような級数を持ってきたら適当か？  $T$  の区間で各級数が  $f(-t) = -f(t)$  を満たすのは  $\sin(\omega_0 t)$  の関数系が考えられる。

そこで、 $T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  として

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \tag{2.1}$$

と展開してみる。 $\{b_n\}$  は未定係数である。この形に展開した後はその係数  $\{b_n\}$  を決定すれば基の  $f(t)$  が表現できることになる。この級数の各項は  $T$  の区間に整数個の  $\sin$  波をもつ関数系であり、 $n\omega_0$  の角周波数成分を持つ波による展開である。従って、この展開は奇関数である周期関数を  $n\omega_0$  の角周波数成分を持つ波に分解していることに相当する。 $\{b_n\}$  はその成分の大きさを表す。

さて、右辺の未定係数  $\{b_n\}$  を求めるには特定の  $b_n$  を含む項以外が消えるような演算を両辺に施せばよい。(2.1)の両辺に  $\sin m\omega_0 t$  を掛けて積分すると

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{T}{2} & (m = n) \end{cases} \tag{2.2}$$

したがって  $m \neq n$  ではすべて 0 となるので、右辺 =  $b_n \frac{T}{2}$  となる。その結果、

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \tag{2.3}$$

の関係が得られる。したがって、未定係数を(2.3)によって全て求めることができる。このような関数列  $\{\sin m\omega_0 t\}$  を直交関数と呼ぶ。直交とは式(2.2)のように  $m = n$  を除き全て 0 となる性質をいう。直交関数の利点は、 $n$  を増やしていったときに  $b_{n-1}$  の値に関わらず  $b_n$  が決まり、式(2.1)の近似精度が良くなる点にある。 $b_n$  の収束に関連するが、一般に項数  $n$  を多く取るほど近似精度が上がる。直交関数は  $\{\sin m\omega_0 t\}$  だけではな

く、 $\{\cos m \omega_0 t\}$ ,  $\{\exp(j m \omega_0 t)\}$ , ベッセル関数列, ルジャンドル関数列など種々のものがある。くわしは専門書にゆずる。

$f(t)$ が偶関数の場合も同様に  $\cos(n \omega_0 t)$  の級数により展開することができる。

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n \omega_0 t) \tag{2.4}$$

直交関数列  $\{\cos m \omega_0 t\}$  を両辺に掛けて  $-\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}$  で積分すると

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m \omega_0 t \cos n \omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{T}{2} & (m = n \neq 0) \\ T & (m = n = 0) \end{cases} \tag{2.5}$$

より,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n \omega_0 t dt \tag{2.6}$$

任意の関数は偶関数と奇関数の和で表されるから、一般に周期関数については以下のように表現できることになる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t) \tag{2.7}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n \omega_0 t dt \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \tag{2.8}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n \omega_0 t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{2.9}$$

これを関数  $f(t)$  のフーリエ級数展開という。係数列  $a_n$ ,  $b_n$  については、少なくとも右辺の積分値が値を持つことが必要である。

**例題1** 周期  $T$  の三角波をフーリエ級数展開してみよう。

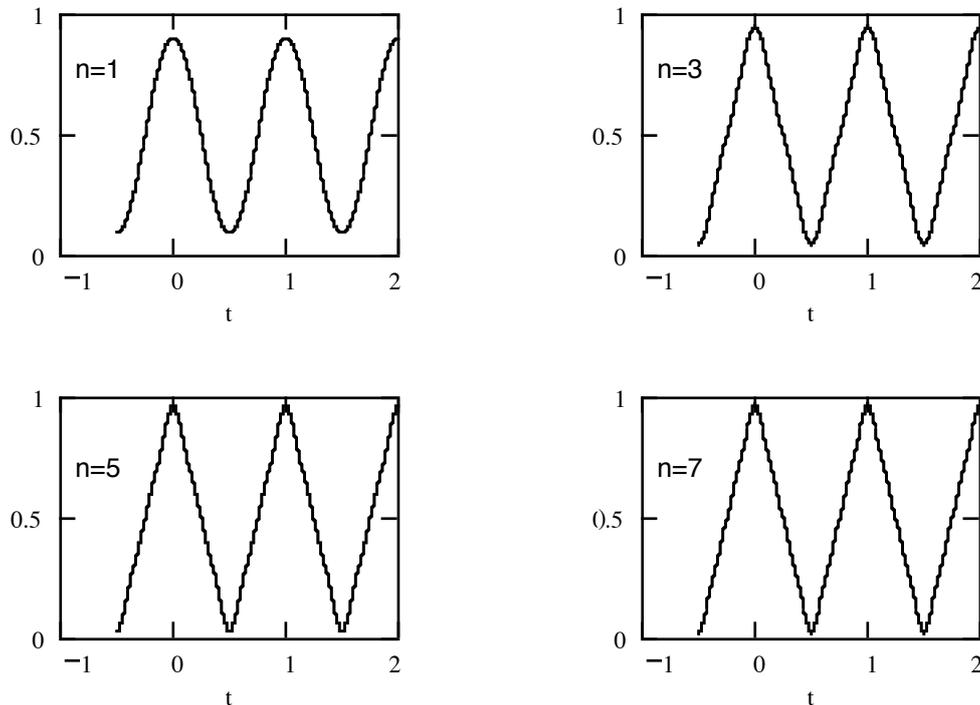
$$f(t) = 1 - \frac{2|t|}{T} \quad \left(-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}\right) \tag{2.10}$$

これは偶関数になっているので  $\cos(n \omega_0 t)$  の級数により展開することができる。

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n \omega_0 t dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & (n=0) \\ \frac{4}{\pi^2 n^2} & (n: \text{odd}) \\ 0 & (n: \text{even}) \end{cases} \quad (2.11)$$

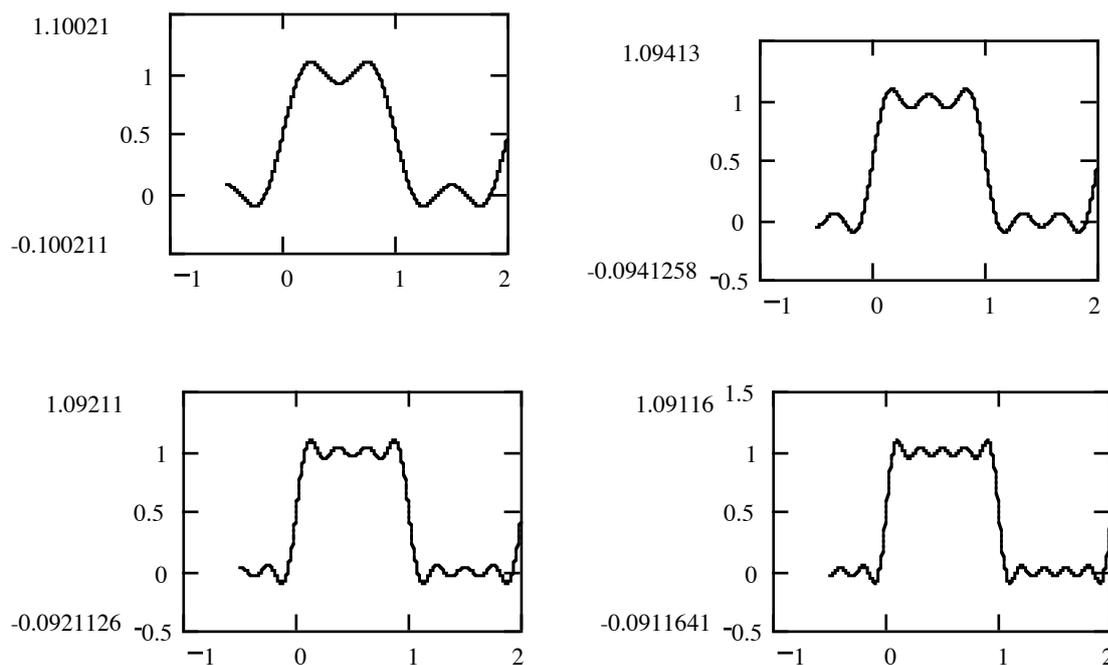
$$\text{したがって, } f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left\{ \cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right\} \quad (2.12)$$

この展開式が基の波形に収束してゆく様子を図に示す。項数を増やすほど近似の精度が上がっていく。



### 例題2 不連続関数

最初に述べたようにフーリエ級数は不連続関数にも適用できる。そこで、幅1周期2の方形パルス関数列をフーリエ級数展開してみよう。下の図は展開の項数を増やしていったときの様子を示している。結果から分かること展開の項数を増やすと不連続点の近くでは関数が激しく振動し、オーバーシュートを生じている。これはGibbsの現象と呼ばれ、n無限大の極限ではオーバーシュートの時間幅は無限小となるが、その振幅は一定値（不連続段差の9%）に近づくことが知られている。



## 2.2 指数フーリエ級数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t) \quad (2.13)$$

において、 $\cos n \omega_0 t$  と  $\sin n \omega_0 t$  はexp関数で置き換えることができるので

$$\cos n \omega_0 t = \frac{e^{jn \omega_0 t} + e^{-jn \omega_0 t}}{2} \quad \sin n \omega_0 t = \frac{e^{jn \omega_0 t} - e^{-jn \omega_0 t}}{2j}$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \omega_0 t}} \quad (2.14)$$

とも表すことができる。この場合の係数  $c_n$  は

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jm \omega_0 t} dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(n-m) \omega_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-m) \omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ T & (m = n) \end{cases} = c_n T \end{aligned}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn \omega_0 t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)} \quad (2.15)$$

となり，一般に複素数である． $a_m, b_n$  は実数であったが，展開している関数系が異なるためである．この形式を指数フーリエ級数または複素フーリエ級数と呼ぶ． $\cos n \omega_0 t, \sin n \omega_0 t, \exp(j n \omega_0 t), \exp(-j n \omega_0 t)$  は次式を満たし，

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin m \omega_0 t \sin n \omega_0 t dt = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (\text{クロネッカーのデルタと呼ぶ})$$

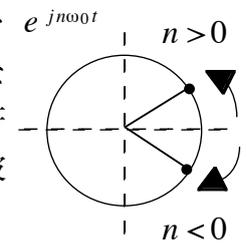
$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos m \omega_0 t \cos n \omega_0 t dt = \delta_{nm}$$

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin m \omega_0 t \cos n \omega_0 t dt = \delta_{nm} \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt = \delta_{nm}$$

それぞれ直交関数系をなしている．

複素フーリエ級数の係数で注意すべきことは，級数の範囲が  $-\infty$  から  $\infty$  までとなっていることである．これは形式的には負の周波数を考えていることを示す．周波数といえば振動周期の逆数で正の値を持つが，負の周波数とは何を意味しているのだろうか？複素関数  $e^{jn\omega_0 t}$  は複素平面上で  $t$  の増加と共に単位円の軌跡を  $e^{jn\omega_0 t}$  |  $n > 0$  描くが，その向きは  $n > 0$  のとき反時計方向， $n < 0$  のときは時計方向となる．すなわち，この場合には周波数の大きさは回転の速さを，その符号は回転の向きを表していることになる．これは複素平面上での周波数の概念を拡張したことになる．



フーリエ級数展開は周期関数を基本周波数  $\omega_0 = 2\pi / T$  とその整数倍の周波数をもつ正弦波の成分に分解することを意味している．このとき， $|n| = 1$  の成分を基本波，それ以上の成分を高調波，また， $n = 0$  の成分を直流成分と呼ぶ．各周波数の絶対値  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}, |c_n|$  は元の信号  $f(t)$  に含まれる周波数成分の大きさを表し， $f(t)$  の振幅周波数スペクトルという．または単に周波数スペクトルという．

また，各周波数の位相項は位相スペクトルと呼ばれる．振幅スペクトルが同じでも位相スペクトルが異なると信号波形は異なったものとなるので，ビデオ信号のように波形を忠実に伝送する事が必要な場合には重要である．

ある信号がどれだけの周波数スペクトルの広がりを持つかは，信号解析，通信システムの設計において最も重要な要素であり，周波数帯域幅というパラメータによって表現される．

周期信号の平均電力  $\bar{P}$  は次のように表すことができる．

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2.17)$$

これは平均電力が各周波数成分の和で与えられることを示している。この関係をパーセバルの定理という。そして、このことから  $(a_n^2 + b_n^2)$  および  $|c_n|^2$  をパワースペクトルと呼ぶ。

### 3. フーリエ変換

フーリエ変換は周期関数に対するフーリエ級数の考え方を非周期関数の場合に拡張したものである。フーリエ級数は、周期関数であれば、その周期内で定義できる連続な直交関数系で展開できるというものであった。つまり、周期関数を各周波数成分に分解することに相当する。もし、対象とする関数が周期関数でなかったら、どのようなのであろうか？周期関数から非周期関数への拡張するものがフーリエ変換である。

我々が信号を観測できる時間は有限であるので、その時間以外に起こっていることは意味を持たない。したがって、たとえ信号が観測時間の中に周期性を持たなくとも、形式的に信号が十分に長い時間  $T$  毎に繰り返す周期信号と考えることは可能である。これは非周期信号を、周期  $T$  が無限に長い周期信号として取り扱うことに相当する。そこで、(2.15)に定義される指数フーリエ係数  $c_n$  の極限について考えてみる。 $T \Rightarrow \infty$  とすると

$$c_n \Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.1)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_n T \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.2)$$

これが有限であるということは極限として  $c_n \Rightarrow 0$  である。別の書き方をすれば、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_n T = \text{finite} = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} c_n \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (3.3)$$

$\omega_0$  はスペクトル成分の周波数間隔であった。 $\omega_0$  を 0 にするという事は周波数間隔が限りなく 0 に近づき微少周波数当たりの成分の大きさ、つまり、周波数当たりのスペクトルという意味を持つ。そこで  $\omega = n\omega_0$  とおき、(3.2)右辺の積分を  $F(\omega)$  とすると

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (3.4)$$

と表すことができる。 $F(\omega)$  を  $f(t)$  のフーリエ変換と呼び、 $F[f(t)]$  と表す。 $f(t)$  が実関数であっても  $F(\omega)$  は一般に複素数となる。そして

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(j\omega t) dt = F^*(\omega) \tag{3.5}$$

が成り立つ。\*は複素共役である。それゆえ、 $f(t)$ が実数なら、 $F(\omega)$ の実部は偶関数、虚部は奇関数である。これらの関係を用いると、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \omega_0 \tag{3.5}$$

と表すことができる。右辺が一定値に収束する場合、これは積分の定義に一致するので

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \tag{3.6}$$

と書き直すことができる。この $f(t)$ を $F(\omega)$ の逆フーリエ変換と呼び、 $F^{-1}[f(t)]$ と表す。

以上を整理して、信号波形を $f(t)$ 、その周波数スペクトルを $F(\omega)$ とすれば次の関係になる。

フーリエ変換  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$  (3.7)

逆フーリエ変換  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$  (3.8)

$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) df$  ただし、 $\omega = 2\pi f$  (3.9)

### 3.1 フーリエ変換の例

フーリエ変換はある信号を表現するための2つの関数 $f(t)$ と $F(\omega)$ の1対1の対応を示しており、前者を時間領域、後者を周波数領域における表現という。信号を調べるにはどちらの領域で調べてもよい。

#### 例題3

単位インパルス関数 (=デルタ関数 $\delta(t)$ ) を考えてみよう。この単位インパルス関数を用いると、 $t=t_0$ の近傍で連続な関数に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{t_0-\Delta/2}^{t_0+\Delta/2} f(t) dt = f(t_0) \tag{3.10}$$

が成り立つことが分かる。これは単位インパルス関数が他の関数を標本化する働きをもっていることを意味している。この関係を用いると $\delta(t)$ のフーリエ変換は

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3.11)$$

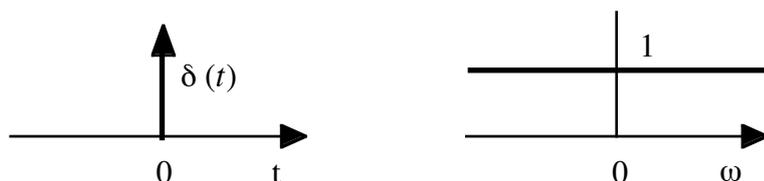
となる。すなわち単位インパルス関数は全周波数帯域にわたり平坦な周波数スペクトルを持つ。

その逆変換は 
$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega t} d\omega \quad (3.12)$$

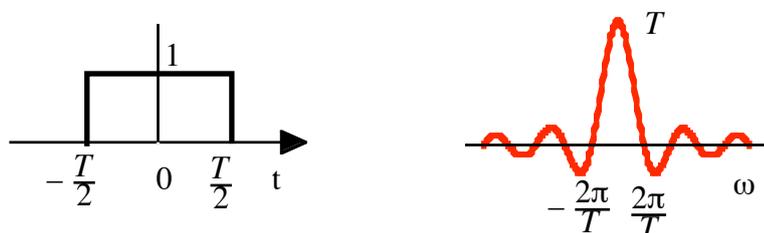
と表せる。この積分を実行することは難しいが、上の式を見比べて  $t$  と  $-\omega$  を交換すると

$$F[1] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(-\omega) = 2\pi \delta(\omega) \quad (3.13)$$

が得られる。すなわち、直流信号の周波数スペクトルは  $\omega = 0$  にのみ値をもつデルタ関数である。



単位インパルス関数とその周波数スペクトル



ゲート関数と Sinc関数

#### 例題 4

次に矩形パルス

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \left(|t| < \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{T}{2}\right) \end{cases} \quad (3.14)$$

のフーリエ変換を考える。

$$F[f(t)] = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j\omega} = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \quad (3.15)$$

これはsinc関数と呼ばれている。標本化で重要な役割を果たすことから**標本化関数**とも呼ばれる。一方、時間領域における矩形関数はある関数にそれを掛けると時間幅Tの部分だけを取り出す操作に相当するので**ゲート関数**とも呼ばれている。

いくつかの代表的な関数のフーリエ変換を表に示す。

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi \delta(\omega)$
$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$
$\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$	$\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$e^{-\alpha t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$

### 3.2 フーリエ変換の性質

フーリエ変換を道具として扱うには、その性質を知っておくことが重要である。定義式から導かれるいくつかの性質について示す。簡単のため、 $f(t)$ と $F(\omega)$ とがフーリエ変換であることを $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ と表す。

(1) **線形性**      2つの関数 $f(t), g(t)$ と定数 $a, b$ に対して

$$a f(t) + b g(t) \leftrightarrow a F(\omega) + b G(\omega) \tag{3.16}$$

が成り立つ。この線形性により、任意個数の関数の線形結合に対しても同様の関係が成り立つ。多数の信号が存在するときに重要な性質である。

(2) 対称性 フーリエ変換とその逆変換がほとんど同じ形式を持つため、時間領域と周波数領域を入れ替えた関係

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \tag{3.17}$$

が成り立つ。デルタ関数と直流信号のように、ある関数の周波数領域での表現が時間領域での表現と同じになるとき、これらの関数がそれぞれの領域で示す性質を調べれば他方の領域での振る舞いも知ることができる。

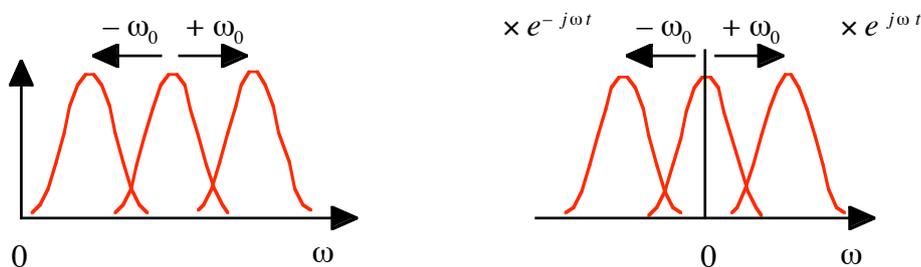
(3) 相似性 矩形関数のフーリエ変換から分かるようにパルス幅  $T$  を大きくしてゆくと周波数スペクトルの広がり  $1/T$  に比例して狭くなるのが分かる。これは周期と周波数が逆数の関係にあることを示している。

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{3.18}$$

(4) 周波数推移  $f(t)$  を  $f(t)e^{j\omega_0 t}$  に置き換えると

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \tag{3.19}$$

の関係が得られる。これは複素数に拡張された周波数という意味での変調の概念を表している。 $f(t)$  に周波数  $\omega_0$  で回転する関数を乗じるという操作は、周波数領域でスペクトルを  $\omega_0$  だけ移動することに相当する。 $\omega_0 > 0$  であれば、スペクトルは右へ（正の方向へ）、 $\omega_0 < 0$  であれば、左へ（負の方向へ）移動することが分かる。周波数を高くすることはスペクトルを右へ、低くすることは左へ移動させることであるから、変調周波数の増減がスペクトルの左右への移動を表すことは容易に理解できる。負の周波数は  $\omega = 0$  を越えて左へ移動したものであり、周波数を自然に負の領域に拡張したものに他ならない。



周波数推移と負の周波数

さて、周波数推移の式で  $f(t) = 1$  とおくと、

$$1 e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \tag{3.20}$$

これは拡張された周波数軸において単一の周波数成分をもつ信号が、時間領域では通常の正弦波ではなく複素信号  $e^{j\omega_0 t}$  であることを示す。このことは、電気回路で常用される演算子法の数学的根拠となっている。表に示したように通常の三角関数波は

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &\leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ \sin(\omega_0 t) &\leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

となり、 $\pm\omega_0$  の周波数成分をもつことがわかる。

(5) 時間推移 周波数推移と同様に時間軸での推移は

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (3.21)$$

の関係が成り立つ。これは時間軸上で信号を  $t_0$  遅延することが、各周波数成分の位相を  $\omega_0 t$  だけ回転させることに相当する。回転角が周波数に比例するのは同じ時間遅延量でも高い周波数成分にとっては大きな位相変化に相当するためである。

(6) 時間微分と時間積分 逆フーリエ変換の定義式右辺で時間を含むのは  $e^{j\omega_0 t}$  の項だけであるから、この式は容易に微分・積分ができる。そして次の関係式が得られる。

$$\frac{d f(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega) \quad \int_{-\infty}^t f(t) e^{-j\omega t} dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (3.22)$$

つまり、時間領域での微分は周波数領域で  $j\omega$  を乗じること、積分は  $j\omega$  で割ることを意味する。微積分が  $j\omega$  の乗除に対応するのは指数関数自身の性質による。

このことから、微分は  $j\omega$  のかけ算となり、 $\omega$  が大きいほど高周波成分が大きくなるので高域強調フィルターとしての役割をもち、積分は  $j\omega$  の割り算のため低周波成分が強調され、低域強調フィルターとしての役割をもつことが分かる。微分器、積分器としてフィルターに利用されている。

## 4. たたみ込み積分

2つの関数のたたみ込み積分(Convolution Integral)を次のように定義する。

$$f(t) \otimes g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx \quad (4.1)$$

そのフーリエ変換は

$$\begin{aligned} F[f(t) \otimes g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-j\omega t} dt \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t') e^{-j\omega t'} dt' \right] e^{-j\omega x} dx \quad (t' = t - x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(\omega) e^{-j\omega x} dx \\ &= F(\omega) G(\omega) \end{aligned} \quad (4.2)$$

となり、 $f(t)$ と $g(t)$ のそれぞれのフーリエ変換積になっていることがわかる。この式から、

$$f(t) \otimes g(t) = g(t) \otimes f(t) \quad (4.3)$$

であることも自明である。また、上式で時間領域と周波数領域を入れ替えると、

$$F[f(t) g(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes G(\omega) \quad (4.4)$$

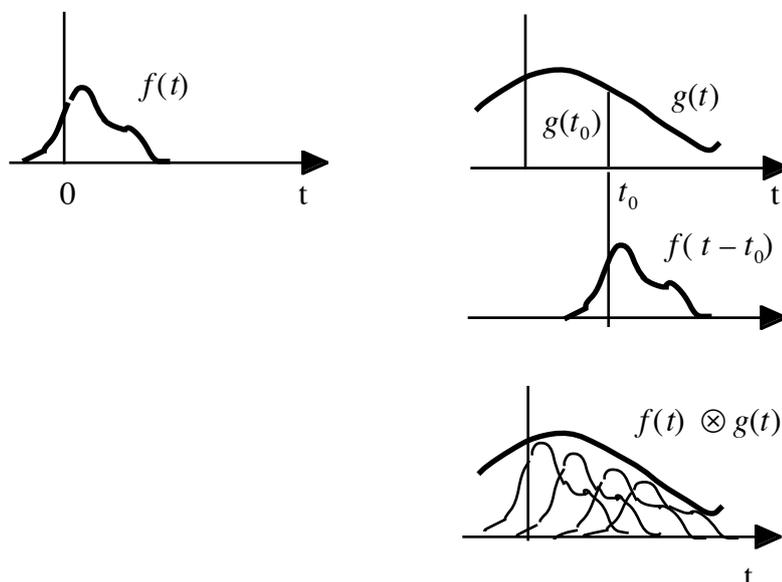
が得られる。すなわち、一方の領域における積は他方の領域でのたたみ込み積分に対応し、その逆も成り立つ。

たたみ込み積分の意味を理解するために、一方の関数  $g(t)$  を狭い等間隔の区間  $\Delta$  に分割し、その1つを矩形パルス  $g(t_0) \delta_{\Delta}(t-t_0)$  で近似する。これと  $f(t)$  のたたみ込みは  $\Delta$  が十分小さいとすれば、デルタ関数の性質を用いることができ、

$$f(t) \otimes [g(t_0) \delta_{\Delta}(t-t_0)] = g(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_{\Delta}(t-t_0-x) dx \quad (4.5)$$

$$= g(t_0) f(t - t_0)$$

となり、 $f(t)$  を  $t_0$  だけ移動して  $g(t_0)$  倍したものとなる。これをあらゆる区間について加え合わせ、 $\Delta \rightarrow 0$  の極限を取ったものがたたみ込み積分である。図にその概念を示す。



たたみ込み積分の概念

式(4.4)に式(3.5)を適用すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t) e^{-j\omega t} dt &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes G(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') G(\omega - \omega') d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') G^*(\omega' - \omega) d\omega' \end{aligned} \quad (4.6)$$

となり、ここで  $f(x) = g(t)$  として  $\omega = 0$  とおくと

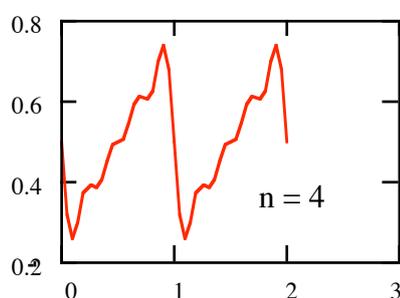
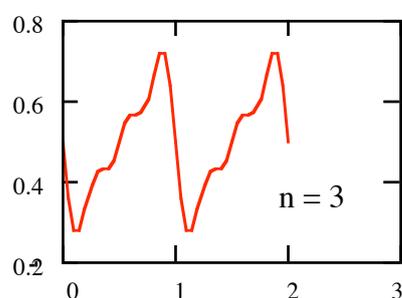
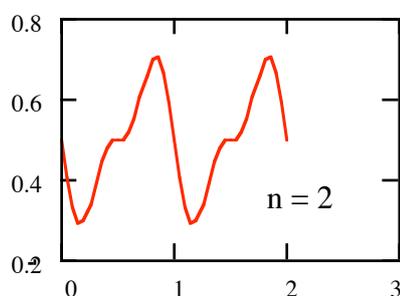
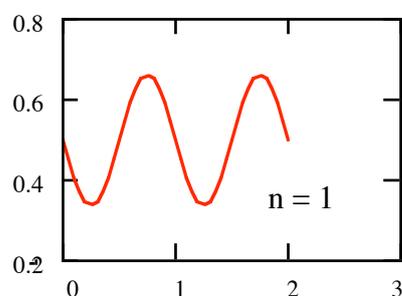
$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') F^*(\omega') d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4.7)$$

が得られる。上式の左辺と右辺は、それぞれ時間領域と周波数領域における信号エネルギーを表すので、フーリエ級数の場合と同様にこれをパーセバル定理という。

問題1 周期Tで繰り返すのこぎり波のフーリエ級数展開を求めよ。

$$f(t) = t \quad (0 \leq t < T)$$

解:  $f(t) = \frac{T}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n\pi} \sin n\omega_0 t$



問題2 次の関数のフーリエ変換を求め、ゲート関数のフーリエ変換との関係を考察せよ。

$$f(t) = \begin{cases} T - |t| & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

解:

$$F(\omega) = T^2 \left\{ \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right\}^2 = F[\Pi(t/T)]^2$$

$$f(t) = \Pi(t/T) \otimes \Pi(t/T)$$

参考文献: 寺田, 木村, 吉田, 岡田, 佐藤亨, 大学課程情報通信工学, オーム社, H5  
 のなかで, 第3章(佐藤亨先生担当)を主に参考にした。